

DOI: 10.3901/JME.2010.18.029

基于刚体位移的天线反射面拟合新算法*

马增祥^{1,2,3} 杨德华^{1,2} 王淑青^{3,4} 程景全⁵

- (1. 中国科学院国家天文台南京天文光学技术研究所 南京 210042;
2. 中国科学院天文光学技术重点实验室 南京 210042;
3. 中国科学院研究生院 北京 100049;
4. 中国科学院国家天文台 北京 100012;
5. 美国国立射电天文台 夏洛茨维尔 VA 22903-2475 美国)

摘要: 射电望远镜和雷达天线的反射面的加工误差和变形直接影响系统的工作性能。为准确计算反射面的实际误差,一般须对变形后的反射面进行最佳抛物面拟合。基于刚体空间运动原理,提出一种利用确定刚体位移的 6 自由度及抛物面的焦距共 7 个广义自由度来拟合空间抛物面的新方法。通过该方法可直接求得最佳抛物面的顶点空间位置、轴线方向及其焦距。回顾传统的由一般二次曲面推出特征值的抛物面拟合法和小变形下基于法向偏差的抛物面拟合方法,并通过计算实例与之进行比较。验证了方法的稳定性和精确性。同时还集成了一种简便的拟合误差求解方法。

关键词: 抛物面拟合 刚体位移 自由度 坐标变换 最小二乘法 误差

中图分类号: TN957.2

Antenna Reflector Surface Fitting Algorithm Based on Rigid Body Displacement Principle

MA Zengxiang^{1,2,3} YANG Dehua^{1,2} WANG Shuqing^{3,4} CHENG Jingquan⁵

- (1. National Astronomical Observatories/Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042;
2. Key Laboratory of Astronomical Optics & Technology, Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042;
3. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049;
4. National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012;
5. The National Radio Astronomy Observatory, Charlottesville VA 22903-2475, USA)

Abstract: Manufacture errors and deformation of a radio telescope or radar antenna reflector have a direct effect on the system performance. To precisely figure out the actual surface error of a reflector, a best paraboloid fitting for the deformed reflector is necessary. Based on the space motion principle of a rigid body, a novel algorithm on paraboloid fitting is developed, which introduces 7 generalized degrees of freedom (DOF) defined as the 6 rigid body DOFs and the focal length of the paraboloid. The orientation and vertex position as well as the best focal length of the required best-fit paraboloid are explicitly computed by the least square procedure. Traditional fitting strategies based on quadric surface eigenvalues extraction and on normal deviation minimization with small deformation are reviewed and afterwards compared with the provided new method with examples. The application demonstrates the stability and accuracy of the proposed algorithm. Moreover, a simple error estimation method based on iteration concept is also included.

Key words: Paraboloid surface fitting Rigid body displacement Degrees of freedom Coordinate transformation
Least squares Errors

0 前言

抛物面天线在雷达和射电天文中广泛应用。天

线的面形在加工和使用过程中都应保持其准确形状,天线实际面形与其理想准确形状之间的差别即为面形误差。面形误差的大小直接影响天线性能。为确定天线的面形误差,一般采用对变形后的天线表面进行抛物面二次曲面的拟合,即求出一个和变形后的抛物面的法向距离最小的最佳拟合抛物

* 国家自然科学基金(10973025)和 25 米 NRT 射电望远镜资助项目。
20091215 收到初稿,20100511 收到修改稿

面^[1]。这一拟合过程常用的经典方法主要有三种：① 以天线变形后的面形到最佳吻合抛物面法向偏差取最小来拟合抛物面^[1]；② 对一般二次曲面方程通式进行简化的拟合方法^[2]；③ 以一般二次曲面方程通式附加抛物面限制条件的方法进行拟合^[3]。前二者只适合于变形和转角都很小的情况，第三种方法虽能够拟合空间任意位置的曲面，但得到的参数不完全满足条件式的原来形式^[4]。为了能够在任意测量坐标系下测得的数据进行曲面拟合，本文借鉴机械和力学中刚体空间三维运动学的原理，提出一种基于刚体位移的抛物面拟合新算法，用以直接获得最佳拟合抛物面的所有精确参数。即视抛物面为刚体，利用确定其位移所需要的 6 自由度以及抛物面焦距共 7 个广义自由度/变量进行空间抛物面的拟合。另外，抛物面的面形误差一般采用统计变形后的天线面上的点到最佳拟合抛物面的距离的方均根作为评价标准^[5-6]。现有方法中多采用穷举法求点到曲面的距离^[3]，该方法不够精确，且计算量大；或根据抛物面的几何性质来计算误差^[7]，求解过程也过于繁琐。本文提出通过将测量坐标系下的点经求得的参数转换到标准坐标系下再进行误差统计的新方法。这一方法与上述拟合算法一起，从而形成了具有理论直观和编程简洁特点的基于刚体位移思想的最佳抛物面拟合的系统方法。最后采用理论模拟抛物面误差和实际天线面板工程测量作为实例应用对此新方法进行了验证与比较。

1 抛物面的拟合

1.1 法向偏差拟合算法

如图 1 所示，假设抛物面理想的面形方程为

$$x'^2 + y'^2 = 4f'z' \quad (1)$$

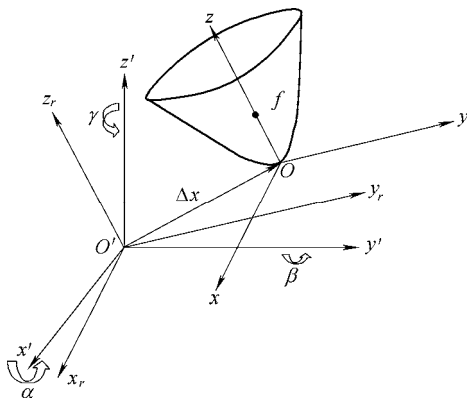


图 1 刚体空间自由度示意图

在外力作用下，天线的结构将发生变化，天线表面上的点将相对原来的理想抛物面发生小的位移，这时存在一个天线表面的最佳拟合抛物面，该

抛物面的顶点坐标为 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ，焦距变化为 h ，绕 x 和 y 方向的转角分别为 α 和 β 。设最佳抛物面在新的坐标系下的方程为

$$x^2 + y^2 = 4fz \quad (2)$$

则新旧坐标之间的关系为

$$\begin{cases} x = (x' - \Delta x) - z'\beta \\ y = (y' - \Delta y) + z'\alpha \\ z = (z' - \Delta z) + x'\beta - y'\alpha \\ f = f' + h \end{cases} \quad (3)$$

忽略高次项，则新的抛物面在原坐标系下表达式为

$$x'^2 + y'^2 + 2z'y'\alpha - 2z'x'\beta - 2x'(\Delta x + 2f'\beta) - 2y'(\Delta y - 2f'\alpha) - 4z'(f' + h) + 4f'\Delta z = 0 \quad (4)$$

考虑抛物面上的任一点，如果它的坐标为 (x'_i, y'_i, z'_i) ，则通过该点求得垂直于抛物面表面的法线的方向余弦。假设原坐标系下该点在外力作用下的位移是 $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ ，而变形后的该点与最佳拟合抛物面的距离为 δd_i ，则 δd_i 为

$$\delta d_i = \pm \frac{1}{2\sqrt{f'(f' + z'_i)}} [x'_i(\Delta x_i - \Delta x) + y'_i(\Delta y_i - \Delta y) + 2f'(\Delta z_i - \Delta z) - 2z_i h + y'_i(2f' + z'_i)\alpha - x'_i(2f' + z'_i)\beta] \quad (5)$$

对于所有 N 个表面节点，各点到最佳拟合抛物面的距离的平方和

$$G = \sum_{i=1}^N \delta d_i^2 \quad (6)$$

根据最小二乘法的定义，可得到确定最佳吻合抛物面参数的方程为

$$\frac{\partial G}{\partial \Delta x} = \frac{\partial G}{\partial \Delta y} = \frac{\partial G}{\partial \Delta z} = \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\partial G}{\partial \beta} = \frac{\partial G}{\partial h} = 0 \quad (7)$$

通过式(7)可解得待定参数。从方程推导过程可以发现，方程组为线性方程组，方程的求解不需要迭代计算，应用最小二乘法方程组的解法直接求解。

由上述可知，法向偏差拟合算法在方程推导过程中省略了变形位移和转角的高阶项，即假定抛物面的空间位移和转角很小。可见此法只适合变形很小的情况，当拟合空间位移和转动较大时将失真，结果不可靠，也使得此法不适于抛物面的测量测绘工程。

1.2 以特征值为参数的拟合算法

一般的二次曲面方程可写为^[4, 8]

$$a_0 + (a_1 + a_2 + a_3) \mathbf{X}' + \mathbf{X}'^T \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^T \mathbf{X}' = 0 \quad (8)$$

式中， a_0 不能拟合，取值为三个坐标值范围的乘积，式(8)中包含 9 个参数，在抛物面拟合中取

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = 0$, $\gamma = 0$ 进行拟合。所以拟合抛物面只需要 6 个参数 $(a_1, a_2, a_3, \lambda, \alpha, \beta)$, 列出误差方程并线性化。

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial v_i}{\partial a_2} \delta a_2 + \frac{\partial v_i}{\partial a_3} \delta a_3 + \frac{\partial v_i}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial v_i}{\partial \beta} \delta \beta - l_i \quad (9)$$

同上, 解出待定参数, 然后对测量坐标进行旋转变换: $\mathbf{X}_r = \mathbf{R}^T \mathbf{X}'$, 得到测量坐标旋转后的坐标 $\mathbf{X}_r(x_r, y_r, z_r)$ 代入式(8)得

$$a_0 + (b_1 \ b_2 \ b_3) \mathbf{X}_r + \mathbf{X}_r^T \mathbf{A} \mathbf{X}_r = 0 \quad (10)$$

展开并配方后对坐标进行平移得

$$\mathbf{X} = (x \ y \ z)^T = (x_r \ y_r \ z_r)^T + \left(\begin{array}{ccc} \frac{b_1}{2\lambda} & \frac{b_2}{2\lambda} & \frac{a_0 - \lambda \left(\frac{b_1}{2\lambda}\right)^2 - \lambda \left(\frac{b_2}{2\lambda}\right)^2}{b_3} \end{array} \right)^T \quad (11)$$

得到标准坐标系下抛物面方程

$$x^2 + y^2 = -\frac{b_3}{\lambda} z \quad (12)$$

从而, 可求出平移坐标和焦距为

$$\Delta x = \frac{b_1}{2\lambda} \quad \Delta z = \frac{a_0 - \lambda \left(\frac{b_1}{2\lambda}\right)^2 - \lambda \left(\frac{b_2}{2\lambda}\right)^2}{b_3}$$

$$\Delta y = \frac{b_2}{2\lambda} \quad f = -\frac{b_3}{4\lambda}$$

1.3 应用刚体位移思想的拟合算法

刚体运动是一个力学概念, 若一个物体在空间运动的过程中, 它上面的任意两点之间的距离始终保持不变, 则物体作刚体运动, 即物体只是位置发生了改变。刚体的空间一般运动可以分解为刚体的平移运动和刚体的定点转动。平动部分可用点的三个坐标变化 Δx 、 Δy 和 Δz 描述, 定点转动部分可以用三个欧拉角 α 、 β 和 γ 描述^[9]。这 6 个坐标就是刚体作一般运动时的广义坐标。本文视最佳拟合抛物面、测量点阵和标准坐标系为刚体, 如图 1 所示, 并假设发生变形或加工得到的抛物面的最佳拟合抛物面标准方程同式(2)。写成矩阵的形式

$$(x \ y \ z) \mathbf{A} (x \ y \ z)^T = (0 \ 0 \ f) (x \ y \ z)^T \quad (13)$$

式中, f 为焦距, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

由式(13)可以看出, 在标准坐标系下, 抛物面方程的参数只有一个焦距 f , 确定了 f 的值, 即可确定抛物面方程。以在标准坐标系下的原点作为参考点, 可以用旋转运动加上平移运动来描述其位置和方位的变化。假设初始情况下标准坐标系与测量坐标系重合, 则图 1 中测量坐标系 $(O'x'y'z')$ 下的抛物面的姿态可以认为是标准坐标系、变形点与最佳拟合抛物面上对应的点绕测量坐标系原点 O' 的定点转动和沿三个坐标轴方向的平移运动的结果。设绕 x' 、 y' 、 z' 轴的转角分别为 α 、 β 和 γ , 平移量为 $\Delta \mathbf{X}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, 抛物面焦距为 f 。从刚体位移的角度看, 曲面刚体有 6 自由度, 所以对一个抛物面刚体的拟合需要 7 个参数。又由于旋转抛物面关于其对称轴 z 轴旋转对称, 不需要参数 γ , 取 γ 为常数零, 故只需要 6 个参数, 即转角 (α, β) , 平移 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 以及焦距 f 。

根据刚体的旋转和平移公式, 测量坐标系下的坐标值为

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R} \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X} \quad (14)$$

式中, $\mathbf{X}' = (x' \ y' \ z')^T$, $\mathbf{X} = (x \ y \ z)^T$, \mathbf{R} 为方向余弦矩阵。

刚体的欧拉角与方向余弦阵的关系为 $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\gamma) \mathbf{R}(\beta) \mathbf{R}(\alpha)$ 。根据上述抛物面特性, 取 $\gamma = 0$, 则 $\mathbf{R}(\gamma) = \mathbf{I}$ 。又由三角函数的特性, \mathbf{R} 为正交矩阵, 所以有 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ 。

由刚体运动的物理性质可知, 任何刚体运动都具有逆运动, 则用测量坐标系坐标表示标准坐标系坐标为

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) = \mathbf{R}^T (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) \quad (15)$$

代入抛物面标准方程得

$$\left(\mathbf{R}^T (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) \right)^T \mathbf{A} \left(\mathbf{R}^T (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) \right) = (0 \ 0 \ 4f) \left(\mathbf{R}^T (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) \right) \quad (16)$$

由于天线的变形和加工误差以及测量误差, 测量点并不能完全满足式(16), 其误差方程为

$$v_i = \left(\mathbf{R}^T (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) \right)^T \mathbf{A} \left(\mathbf{R}^T (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) \right) - (0 \ 0 \ 4f) \left(\mathbf{R}^T (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) \right) \quad (17)$$

对误差方程式(17)进行线性化

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial \Delta x} \delta \Delta x + \frac{\partial v_i}{\partial \Delta y} \delta \Delta y + \frac{\partial v_i}{\partial \Delta z} \delta \Delta z + \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial v_i}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial v_i}{\partial f} \delta f - l_i \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
\text{式中 } \frac{\partial v_i}{\partial \Delta x} &= 2(\mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}))^T \mathbf{A} \left(-\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta x} \right) - \\
&\quad (0 \ 0 \ 4f) \left(-\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta x} \right) \\
\frac{\partial v_i}{\partial \Delta y} &= 2(\mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}))^T \mathbf{A} \left(-\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta y} \right) - \\
&\quad (0 \ 0 \ 4f) \left(-\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta y} \right) \\
\frac{\partial v_i}{\partial \Delta z} &= 2(\mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}))^T \mathbf{A} \left(-\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta z} \right) - \\
&\quad (0 \ 0 \ 4f) \left(-\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta z} \right) \\
\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} &= 2(\mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}))^T \mathbf{A} \frac{\partial \Delta \mathbf{R}^T}{\partial \alpha} (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) - \\
&\quad (0 \ 0 \ 4f) \frac{\partial \Delta \mathbf{R}^T}{\partial \alpha} (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) \\
\frac{\partial v_i}{\partial \beta} &= 2(\mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}))^T \mathbf{A} \frac{\partial \Delta \mathbf{R}^T}{\partial \beta} (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) - \\
&\quad (0 \ 0 \ 4f) \frac{\partial \Delta \mathbf{R}^T}{\partial \beta} (\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}) \\
\frac{\partial v_i}{\partial f} &= -(0 \ 0 \ 4)(\mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X})) \\
l_i &= -(\mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}))^T \mathbf{A} (\mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X})) + \\
&\quad (0 \ 0 \ 4f)(\mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X}))
\end{aligned}$$

由式(17)可得到法方程组^[10-11], 任取平移、转角及焦距的初值, 应用非线性最小二乘原理, 进行迭代求解, 求出相应变量, 不需要进行进一步的计算即可直接得到所需相关参数(平移、转角和焦距)。对于其他的任意二次曲面, 也可以利用本方法, 求出误差方程组进行拟合。

1.4 定焦距拟合

在实际的拟合中, 常常需要定焦距拟合, 即已知 f , 而对变形曲面或加工中的曲面进行测量和拟合, 从而检查曲面的加工或使用中的变形误差。以特征值为参数的方法需要添加限制条件, 增加了计算的难度。应用本文空间刚体位移的方法, 可直接赋值给 f , 这样抛物面拟合只需 5 个参数, 即转角 (α, β) , 平移 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 。同上列出误差方程, 并对误差方程线性化

$$\begin{aligned}
v_i &= \frac{\partial v_i}{\partial \Delta x} \delta \Delta x + \frac{\partial v_i}{\partial \Delta y} \delta \Delta y + \frac{\partial v_i}{\partial \Delta z} \delta \Delta z + \\
&\quad \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial v_i}{\partial \beta} \delta \beta - l_i \quad (19)
\end{aligned}$$

式(19)相对于式(18)减少了关于 f 的偏微分项, 组成法方程组, 可直接迭代求解计算其他参数。

2 抛物面的面形误差统计

抛物面的面形误差一般取变形后的抛物面上

点到最佳拟合抛物面距离的方均根值作为曲面变形统计的评价标准。现有方法计算方法主要有两种:

① 采用穷举法求点到曲面的距离^[3], 该方法直接, 但显然不够精确, 且计算量大; ② 利用抛物面的几何性质, 即抛物面上点到焦点的距离与到抛物面准平面的距离相等的性质来计算误差^[7], 此法求解过程则过于繁琐。本文通过将测量坐标下点利用抛物面拟合求得的参数转换到标准坐标系下, 并利用抛物面单调的特点进行迭代求得该点到最佳拟合抛物面的距离, 这一方法清晰简洁, 具体流程如下所述。

(1) 首先利用求得的平移和旋转参数。将测量坐标系下坐标 \mathbf{X}' 按式(18)转换到标准坐标系下, 即 $\mathbf{X} = \mathbf{R}^T(\mathbf{X}' - \Delta \mathbf{X})$ 。

(2) 利用 (x_i, y_i, z_i) 中 (x_i, y_i) 的值来计算求得抛物面上对应点 (x_0, y_0, z_0) , 如图 2 所示, 过 (x_i, y_i, z_i) 作垂直于 Oxy 平面的直线交于抛物面。由于直线垂直于 Oxy 平面, 易知直线方程为 $x_0 = x_i, y_0 = y_i, z_0 = t$, 代入抛物面标准方程, 求得交点坐标, 即 (x_0, y_0, z_0) 。

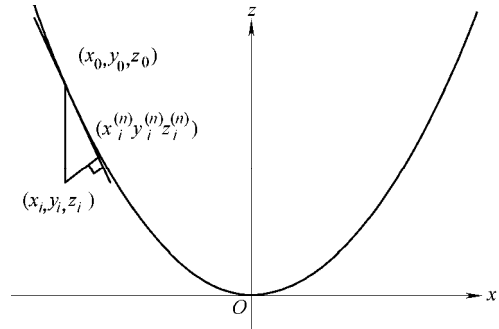


图2 点到抛物面距离图

(3) 过点 (x_0, y_0, z_0) 做抛物面的切平面方程, 法矢量 $(F_{x_0}, F_{y_0}, F_{z_0})$ 就是抛物面方程对 (x_0, y_0, z_0) 的偏导数。求得切平面方程为

$$\begin{aligned}
F_{x_0} (X_0 - x_0) + F_{y_0} (Y_0 - y_0) + \\
F_{z_0} (Z_0 - z_0) = 0 \quad (20)
\end{aligned}$$

(4) 求点 (x_i, y_i, z_i) 到切平面的投影点 $(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, z_i^{(n)})$, 式中 n 为迭代次数, $n=1, 2, 3, \dots$ 。过点 (x_i, y_i, z_i) 垂直于切平面的直线方程为

$$\frac{x - x_i}{F_x} = \frac{y - y_i}{F_y} = \frac{z - z_i}{F_z} = k$$

代入切平面方程式(20)求投影点。

(5) 然后根据投影点再返回到第二步再求曲面上的点。通过迭代直到满足该点与 (x_i, y_i, z_i) 在该点切平面上新的投影点的距离小于一定精度为止, 由抛物面单调的性质可知该迭代收敛。求得的点 (x_i, y_i, z_i) 在抛物面上的投影点为 $(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, z_i^{(n)})$ 。

(6) 最后求点到抛物面的距离

$$\delta d_i = \sqrt{(x_i - x_i^{(n)})^2 + (y_i - y_i^{(n)})^2 + (z_i - z_i^{(n)})^2}$$

从而统计得到抛物面的面形误差

$$e_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta d_i^2}$$

式中， N 为测量点数。

3 数据拟合及比较实例

3.1 模拟数据拟合及比较

为了验证本文方法的正确性，采用VC++编程，随机产生抛物面(理论焦距 $f=8.75$ m)，坐标点变形误差，误差最大为0.000 5 m，并经过旋转和平移，即先后绕 x 轴和 y 轴转 $30^\circ(0.523\ 599\ \text{rad})$ 和 $45^\circ(0.785\ 398\ \text{rad})$ 角，再将抛物面顶点平移(1, 2, 3) m，从而作为测量坐标系下的具有变形误差的点。分别采用特征值方法和本文刚体位移法两种方法进行自由拟合，结果比较如表1所示；并采用刚体位移法进行定焦距拟合，结果如表2所示。

表1 测量坐标系下不定焦距抛物面拟合结果比较

参数	设定值	拟合方法	
		特征值法	刚体位移法
方均根 e_{RMS}/m	0.000 268	0.000 265	0.000 265
焦距 f/m	8.75	8.750 017	8.750 016
$\Delta x/m$	1	2.828 143	1.000 136
$\Delta y/m$	2	-1.025 891	2.000 733
$\Delta z/m$	3	-2.224 702	2.999 485
绕 x 方向转角 α/rad	0.523 599	0.523 554	0.523 554
绕 y 方向转角 β/rad	0.785 398	0.785 384	0.785 384

表2 测量坐标系下定焦距抛物面拟合结果

参数	设定值	刚体位移法
方均根 e_{RMS}/m	0.000 268	0.000 265
$\Delta x/m$	1	1.000 128
$\Delta y/m$	2	2.000 709
$\Delta z/m$	3	2.999 490
绕 x 方向转角 α/rad	0.523 599	0.523 556
绕 y 方向转角 β/rad	0.785 398	0.785 384

表1为两种方法的拟合数据和原始数据比较。其中特征值法拟合结果中顶点平移值不符合设定值，这是因为先将测量坐标点进行旋转然后再进行平移，得出的是旋转过的平移值。刚体的位移矢量经过平移和旋转其大小和长度不变，可计算得抛物面顶点三个坐标平移数值的平方和为14.000 144 161 134 ≈ 14 ，它是基本不变的，可见特征法求出的顶点平移值并不是真实的平移值，需要经过旋转变换($R\Delta X$)得到真实的抛物面顶点平移值

(1.000 139 9, 2.000 735 9, 2.999 486 9)。比较可见，刚体位移法拟合结果较好。

表2为定焦距拟合和原始数据设定值比较，刚体位移法拟合结果与设定值符合得很好，基本相等。从表1和表2的拟合结果参数数据对比，应用刚体位移拟合结果更加精确，验证了本文刚体位移法的正确性。由于两种方法拟合结果相近，在此只给出一组拟合结果图，见图3和图4，其中，+点为测量点，法向直线表示该点误差方向，长度示意误差的相对大小。

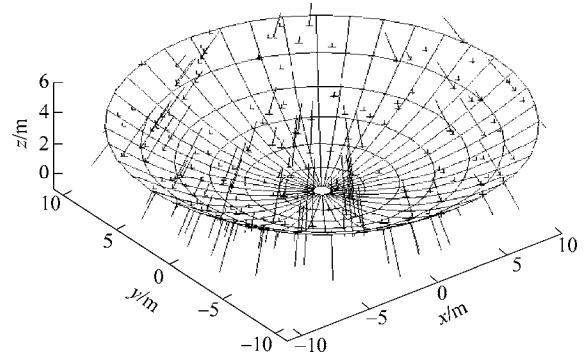


图3 标准坐标系下拟合图

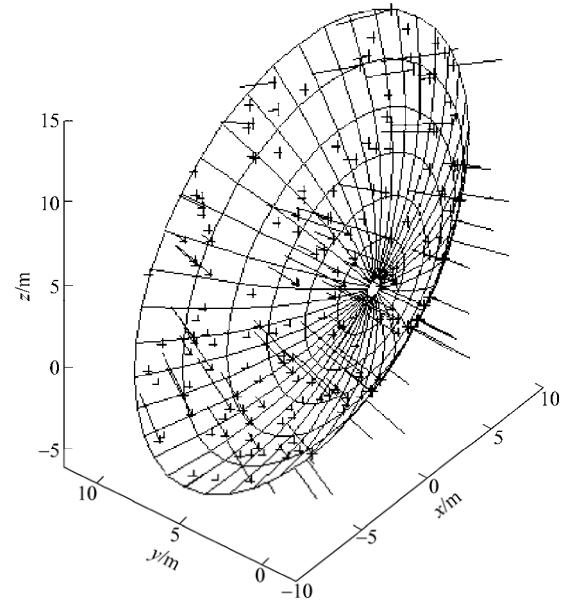


图4 测量坐标系下拟合图

3.2 实测数据拟合及比较

本文使用美国API激光跟踪仪，对紫金山天文台13.7米毫米波射电望远镜(名义焦距为5.080 m)的单面板面变形进行了多次测量，测得该面板上一系列点阵的测量坐标。文中用刚体位移法和特征值法两种方法进行了拟合，并同商业软件Spatial Analyzer(SA)的拟合结果进行比较。SA只给出抛物面对称轴的单位方向矢量 $(i\ j\ k)^T$ ，在标准坐标系下，该矢量为 $(0\ 0\ 1)^T$ 。还用本文提出的刚体位移法和SA进行了定焦距拟合比较。

从表 3 和表 4 可以看出 SA 在定焦距和不定焦距拟合中波动较大, 表明该商业软件在拟合抛物面方面的不稳定性。在不定焦距拟合时, 特征值法和刚体位移法的计算结果基本相同并与定焦距刚体位移法拟合结果相近。

表 3 不定焦距自由拟合

参数	拟合方法		
	SA	特征值法	刚体位移法
方均根 e_{RSM}/m	0.000 202	0.000 116	0.000 116
焦距 f/m	5.33 200	5.112 725	5.105 772
i	0.195 907	0.228 741	0.229 135
j	-0.039 135	-0.099 651	-0.101 678
k	0.979 841	0.968 373	0.968 070

表 4 定焦距自由拟合

参数	拟合方法	
	SA	刚体位移法
方均根 e_{RSM}/m	0.000 605	0.000 117
i	0.369 573	0.231 232
j	-0.203 640	-0.108 405
k	0.906 613	0.966 840

测量坐标系下刚体位移法拟合结果图如图 5 所示。从图 5 中可以看出, 被测面板的位姿相对于拟合得到的最佳抛物面的中心有一定的偏移和转动, 这反映了被测面板的支撑变形和扭曲的存在。

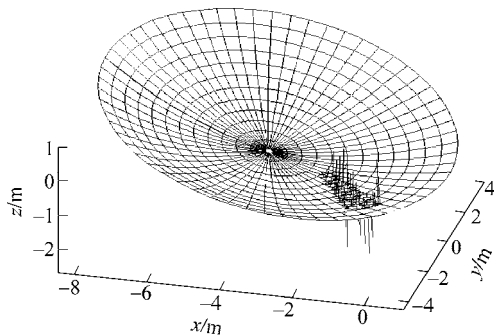


图 5 刚体位移法不定焦距拟合图

综上所述, 本文提出的基于刚体位移的抛物面拟合方法相较于其他常用方法及软件, 表现出更好的稳定性和精确性, 拟合的结果更加可靠, 能够更好地符合实际情况。

4 结论

(1) 基于空间刚体三维运动学原理, 提出了进行射电望远镜和雷达天线抛物面拟合的新方法, 并回顾和比较了常用的如特征值法等拟合方法, 通过算法推导及实例进行对比。刚体位移法可以不用后续计算而直接得出所需空间位置参数。特征值方法求出的顶点平移坐标并不符合实际, 需要再一次进

行旋转变换。

(2) 能够根据已知情况灵活地选取参数, 如常用的定焦距拟合, 可以方便地实现。

(3) 通过模拟数据拟合结果的对比, 刚体位移法对空间位置的拟合结果更精确。

(4) 刚体位移法理论直观和编程简洁。推而广之, 这种基于刚体位移的拟合思想可为其他任意曲线和曲面的拟合所借鉴。

参 考 文 献

- [1] 程景全. 天文望远镜原理和设计[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2003.
CHENG Jingquan. Principles of astronomical telescope design[M]. Beijing: China Science & Technology Press, 2003.
- [2] 华慕林. 天线变形曲面的一种拟合方法[J]. 现代雷达, 1994, 16(1): 75-82.
HUA Mulin. A best-fit method for deformed surface of antennas[J]. Modern Radar, 1994, 16(1): 75-82.
- [3] 程效军, 周适. 用二次曲面方程和抛物面限制条件拟合抛物面天线方程[J]. 铁道勘察, 2008(1): 4-7.
CHENG Xiaojun, ZHOU Shi. To fit paraboloid antenna equation with general quadratic surface equation and paraboloid restrictions[J]. Railway Investigation and Surveying, 2008(1): 4-7.
- [4] 季凯敏, 王解先. 椭圆抛物面的拟合问题[J]. 工程勘察, 2009(1): 78-83.
JI Kaimin, WANG Jiexian. Fitting problems of elliptic paraboloids[J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 2009(1): 78-83.
- [5] 王伟. 大型反射面天线面板调整方法研究和测调软件开发[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2005.
WANG Wei. Study on panel adjustment method and measuring software development for large reflector antenna[D]. Xi'an: Xidian University, 2005.
- [6] 陈树勋. 精密复杂结构的几种现代设计方法[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1992.
CHEN Shuxun. A few modern designing method for precision complex structure[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics & Astronautics Press, 1992.
- [7] 唐文彦, 赵淑芳, 张春富, 等. 任意空间位置雷达天线反射面拟合与评定技术[J]. 现代雷达, 2006, 28(5): 58-62.
TANG Wenyan, ZHAO Shufang, ZHANG Chunfu, et al. Techniques of reflector surface fitting and evaluation of radar antenna located at arbitrary position in space[J].

Modern Radar, 2006, 28(5): 58-62.

- [8] 王解先. 工业测量中一种二次曲面的拟合方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(1): 47-50.

WANG Jiexian. A method for fitting of conicoid in industrial measurement[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2007, 32(1): 47-50.

- [9] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

Harbin Institute of Technology Theoretical Mechanics Teaching and Research Section. Theoretical mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2007.

- [10] 刘钦圣. 最小二乘问题计算方法[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1989.

LIU Qincheng. Least squares problem & calculation method[M]. Beijing: Beijing University of Technology Press, 1989.

- [11] 王从思, 段宝岩, 仇原鹰. 基于最小二乘法的天线变形反射面的拟合[J]. 现代雷达, 2004, 26(10): 52-55.

WANG Congsi, DUAN Baoyan, QIU Yuanying. Fitting of distorted reflector antenna surface based on least square method[J]. Modern Radar, 2004, 26(10): 52-55.

作者简介: 马增祥(通信作者), 男, 1982年出生。主要研究方向为精密机械设计。

E-mail: zxma@niaot.ac.cn

杨德华, 男, 1973年出生, 博士, 研究员。主要研究方向为天文望远镜结构设计及分析、精密机械设计和精密测量。

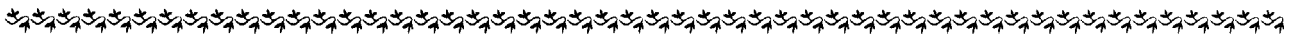
E-mail: dhyang@niaot.ac.cn

王淑青, 女, 1976年出生, 博士研究生。主要研究方向为精密测量。

E-mail: shqwang@lamost.org

程景全, 男, 1946年出生, 博士, 研究员。主要研究方向为天文望远镜设计。

E-mail: jcheng@nrao.edu



(上接第 28 页)

PENG Hu. Introduction to ultrasonic imaging algorithm[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2008.

- [10] DERODE A, TOURIN A, FINK M. Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering[J]. Journal of Applied Physics, 1999, 85(9): 6 343-6 352.

- [11] MAHAFZA B R. 雷达系统分析与设计(Matlab 版)[M]. 2版. 北京: 电子工业出版社, 2008.

MAHAFZA B R. Radar System analysis and design using MATLAB[M]. 2nd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2008.

- [12] ÁLVAREZA F J, HERNÁNDEZB Á, UREÑA J, et al. Real-time implementation of an efficient correlator for

complementary sets of four sequences applied to ultrasonic pulse compression systems[J]. Micro-processors and Microsystems, 2006, 30(1): 43-51.

- [13] 邹谋炎. 反卷积和信号复原[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.

ZOU Mouyan. Deconvolution and signal recovery[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2001.

作者简介: 周正干(通信作者), 男, 1967年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为无损检测及计算机测控技术等。曾获航天工业总公司科技进步二等奖, 发表论文 70 余篇。

E-mail: zzhenggan@buaa.edu.cn

魏东, 男, 1977年出生, 博士研究生。主要研究方向现代超声检测技术。

E-mail: asweidong@yahoo.com.cn

向上, 男, 1985年出生, 博士研究生。主要研究方向为复合材料超声无损评价技术。

E-mail: xiangshang@me.buaa.edu.cn