CN 53 - 1189/P ISSN 1672 - 7673

# 离轴二次曲面面型参数测量归算方法的研究*

周 洋[1,2], 李新南[1]
(1. 中国科学院国家天文台南京天文光学技术研究所, 江苏 南京 210042; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

**摘要**: 为了在制造过程中保证离轴非球面的光学特性, 需要对其主要的面型参数进行严格控制, 除了常规形式的顶点曲率半径和非球面系数外, 还需要控制镜面的离轴量和离轴角。本文基于普通的二次曲面方程, 推导了在新坐标系下的二次曲面表达式, 并在这个坐标系下, 利用 Powell共轭方向法求取镜面的顶点曲率半径、二次曲面系数、离轴量和离轴角。通过对抛物面和双曲面两种形式不同外形的镜面数据的计算, 拟合的 RMS值可以达到 10nm的精度, 从而表明该测量计算方法可以有效地控制离轴面加工时的参数误差。

**关键词**: 光学测量; 离轴非球面; 顶点曲率半径; 二次曲面系数; 离轴量; 离轴角; Powell共轭方向法
**中图分类号**: TG580 **文献标识码**: A **文章编号**: 1672 - 7673 (2008) 03 - 0307 - 05

随着加工检测技术的不断进步, 离轴非球面元件已经越来越多地应用在光学系统中。离轴非球面除了具有简化光学系统、提高系统的成像质量、减小仪器的尺寸和重量的特点之外, 还避免了光学系统的遮拦问题, 所以在天文仪器和空间光学系统中得到了广泛的应用[1~2]。

由于离轴非球面只关于子午面对称, 而非旋转对称的, 所以它的加工检测方法也要比共轴非球面困难得多。为了在加工过程中能实时地控制离轴非球面元件的精度, 就需要测量它的面型参数。所测参数之中, 除了一般形式的顶点曲率半径 $R$和二次曲面系数 $K$之外, 还需要对元件的离轴量和离轴角进行测量。特别是对于大型的拼接镜面, 需要严格控制离轴量和离轴角的数值。另一方面, 在镜面的精磨和抛光过程中, 通过对离轴非球面的面型参数进行控制, 可以有效地提高元件加工的效率, 减少加工的成本。

根据这一需要, 本文提出了一种算法, 只需要干涉仪或轮廓仪检测离散的面型数据, 就可以计算出离轴非球面顶点曲率半径、二次曲面系数、离轴量和离轴角等面型参数, 而且不受镜面外形的影响。实验结果证明, 该算法可以满足精度的要求。

## 1 离轴二次曲面的几何模型

对于一个共轴的二次曲面[3], 其表达式可以写为:

$$z' = \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2\rho^2}} \tag{1}$$

其中 $c$是曲面的顶点曲率, $k$是二次曲面常数, $\rho^2 = x'^2 + y'^2$。

假定离轴二次曲面的对称截面位于 $XOZ$平面, 离轴镜面的中心点位于曲面与 $XOZ$平面交截线上, 设为 $(x_0, 0, z_0)$, 其中 $x_0$与 $z_0$之间的关系可以写为:

$$z_0 = \frac{c x_0^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2 x_0^2}} \tag{2}$$

*基金项目: 国家自然科学基金 (10673020) 资助.
收稿日期: 2008 - 01 - 04; 修定日期: 2008 - 02 - 14
作者简介: 周洋, 男, 硕士, 研究方向: 球面加工与检测技术的研究
Email: superzhouyang@163.com

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对于离轴二次曲面，由于实际检测时镜面的方位与镜子按 (2) 式给出的镜面的方位不同，测量给出的数据与按照 (2) 式坐标计算所得到的数据之间存在着一定的位置误差与倾斜误差，所以如果直接使用这些数据将对拟合结果引入一些不可预计的影响。为了解决这一问题，需要重新建立一个新的坐标系。采用离轴二次曲面的中心点 $(x_0, 0, z_0)$ 为新坐标系的坐标原点，以过该点的切平面为 $xoy$ 平面，如图 1所示。通过这样对实际面型数据的平移和旋转，可以有效地消除位置误差与倾斜误差。同时，还需要重写二次曲面的表达式，使其可以表达在新坐标系下的二次曲面面型。首先，利用下面的关系对坐标系平移和旋转[4]：

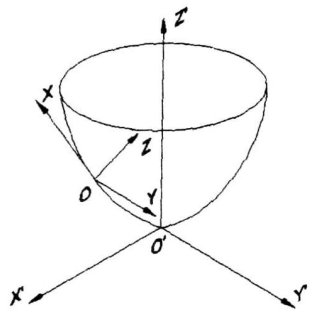


图 1 中心在 $(x_0, 0, z_0)$ 新坐标系 $xyz$

Fig. 1 New coordinate system located in the point $(x_0, 0, z_0)$

$$\begin{aligned} z' &= z\cos\theta + x\sin\theta + z_0, \\ x' &= x\cos\theta - z\sin\theta + x_0, \\ y' &= y. \end{aligned} \tag{3}$$

考虑到点 $(x_0, 0, z_0)$ 的法线方向是在新坐标系的 $z$轴，所以坐标系旋转所需的角度[5]可以表示为：

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'} = \frac{cx_0}{\sqrt{1-(k+1)c^2x_0^2}} \tag{4}$$

根据 (2) 式和 (4) 式，推得中心点 $(x_0, 0, z_0)$ 与 $c$、$k$和 $\theta$的关系：

$$cx_0 = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+k\sin^2\theta}}, \tag{5}$$

$$1-(k+1)cz_0 = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+k\sin^2\theta}}. \tag{6}$$

把 (2) 式和 (3) 式代入 (1) 式，并利用 (5) 式和 (6) 式的关系，经过一系列的代数运算，可以得到在新的坐标系下由 $c$、$k$和 $\theta$表示的二次曲面方程：

$$z = \frac{t}{b+\sqrt{b^2-at}}. \tag{7}$$

其中： $a = c(1+k\cos^2\theta)$; $b = \frac{1}{\sqrt{1+k\sin^2\theta}} - ck\sin\theta\cos\theta x$; $t = c(1+k\sin^2\theta)x^2 + cy_0^2$ .

## 2 面型参数的计算

考虑到对于镜面来说 RMS值是很重要的精度指标，要想根据检测得到的坐标数据求解顶点曲率 $c$、二次曲面系数 $k$和旋转角 $\theta$的数值，根据 (7) 式，采用经过处理的实际面型与理想面型间偏差的 RMS值最小的方法来求解。对于空间的一个区域 $\Omega$，偏离量的 RMS值可以表示为：

$$\mathrm{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij}^2(x_i, y_j, R, \theta)}{mn}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(z_{ideal}(R,\theta) - z_{real}(R,\theta))^2}{mn}} \tag{8}$$

其中： $(x_i, y_j) \in \Omega$, $i = 1, 2, 3 \ldots, m$; $j = 1, 2, 3 \ldots, n$。

由于方程 (8) 是非线性的，很难用直接的或正交化的方法对其进行求解；另一方面，由于 RMS没有显式的表达式，更无法得到它的一阶和二阶导数信息，所以也很难使用一般求解非线性方程组的方法。考虑到上述问题，这里采用直接搜索法中的 Powell共轭方向法[6]来求解这个非线性的方程。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在程序初始化时，需要给出搜索的起始点，这里采用理想的离轴二次曲面面型参数进行计算。从初始点开始，通过迭代搜索的方法，逐步减少实际面型与理想面型间偏差的 RMS值，最终得到一个 RMS的极值，这时所对应的 $c$、$k$和 $\theta$值即为最佳估计值。

在求出离轴非球面的顶点曲率 $c$、二次曲面系数 $k$和旋转角 $\theta$之后，可以利用这些变量，根据（5）式和（6）式以及空间的几何关系，求出非球面的离轴量 $d$和离轴角 $\phi$。

$$d = \frac{\sin\theta}{c\sqrt{1 + k\sin^2\theta}}, \tag{9}$$

$$\tan\phi = \frac{d}{0.5(c - z_0)}. \tag{10}$$

其中 $z_0$ 表达式可由等式（6）得到。

## 3 实　验

为了验证该算法的精度，这里使用 Matlab模拟生成的离轴二次曲面进行仿真试验，并加入 10mm的位置误差和 1°的倾斜误差。采用 $R = 1490$mm、$K = -2$、$D = 150$mm、离轴量 $b = 125$mm、离轴角 $\phi = 0.168972$rad的双曲面和 $R = 1490$mm、$K = -1$、$D = 150$mm、离轴量 $b = 125$mm、离轴角 $\phi = 0.168974$rad的抛物面数据进行拟合，并通过不同孔径外形的比较，进一步验证了算法的可靠性。在实际检测过程中，如上所述的安装误差将会引入 1.3mm测量误差，这种量级的误差很容易在安装过程中被检测出来，并及时调整。所以采用该量级的安装误差是合乎实际情况的。

使用上面所描述的算法，模拟了镜面外形分别为圆形、扇形和六边形的情况，所得的结果见表 1。

表 1　不同外形抛物面和双曲面的参数拟合结果

Table 1　The results of paraboloid mirror for three kinds of shapes

| 类型 | 抛物面 圆形 | 抛物面 扇形 | 抛物面 六边形 | 双曲面 圆形 | 双曲面 扇形 | 双曲面 六边形 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 顶点曲率半径 $R$/mm | 1490.00003 | 1490.00004 | 1490.00003 | 1490.00096 | 1490.00254 | 1490.00153 |
| 二次曲面系数 $k$ | -1.0000 | -1.0000 | -1.0000 | -1.9989 | -1.9986 | -1.9983 |
| 离轴量 $d$/mm | 125.1571 | 125.1571 | 125.1571 | 125.1882 | 125.2022 | 125.2079 |
| 离轴角 $\phi$/rad | 0.16919 | 0.16919 | 0.16919 | 0.169232 | 0.169251 | 0.169259 |
| Zernike 前 8项系数 (从低到高排列) | $9.5\times10^{-11}$ | $2.1\times10^{-10}$ | $9.5\times10^{-11}$ | $3.5\times10^{-8}$ | $9.7\times10^{-8}$ | $5.9\times10^{-8}$ |
| | $-8.5\times10^{-20}$ | $-3.0\times10^{-20}$ | $4.0\times10^{-10}$ | $2.1\times10^{-19}$ | $-9.5\times10^{-18}$ | $7.4\times10^{-15}$ |
| | $-2.8\times10^{-11}$ | $-1.4\times10^{-10}$ | $-1.1\times10^{-11}$ | $-2.3\times10^{-9}$ | $-7.9\times10^{-9}$ | $6.7\times10^{-10}$ |
| | $2.4\times10^{-10}$ | $3.6\times10^{-10}$ | $2.4\times10^{-10}$ | $-2.5\times10^{-9}$ | $-1.1\times10^{-8}$ | $4.7\times10^{-11}$ |
| | $2.1\times10^{-10}$ | $8.2\times10^{-21}$ | $-6.3\times10^{-18}$ | $-2.6\times10^{-19}$ | $-1.3\times10^{-18}$ | $-1.1\times10^{-14}$ |
| | $4.8\times10^{-11}$ | $1.1\times10^{-10}$ | $4.8\times10^{-11}$ | $1.7\times10^{-8}$ | $4.8\times10^{-8}$ | $2.9\times10^{-8}$ |
| | $-1.4\times10^{-19}$ | $-2.6\times10^{-20}$ | $6.6\times10^{-18}$ | $1.1\times10^{-19}$ | $-7.2\times10^{-18}$ | $1.2\times10^{-14}$ |
| | $-1.5\times10^{-13}$ | $-4.1\times10^{-13}$ | $-1.5\times10^{-13}$ | $2.6\times10^{-9}$ | $1.1\times10^{-8}$ | $4.2\times10^{-9}$ |

从 Zernike多项式前 8项系数可知，镜面存在的各种像差是很小的。图 2所示为外形分别为圆形和扇形的双曲面镜面实际表面与理想表面的残差图，图 3为外形分别为圆形和扇形的抛物面镜面实际表面与理想表面的残差图。可以看出对于双曲面，圆形镜面 PV值为 3nm，扇形的有 PV值为 100nm；对于抛物面，圆形镜面 PV值为 0.3nm，扇形的有 PV值为 0.6nm。考虑到实际面型的精度，该算法是可以满足精度要求的。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

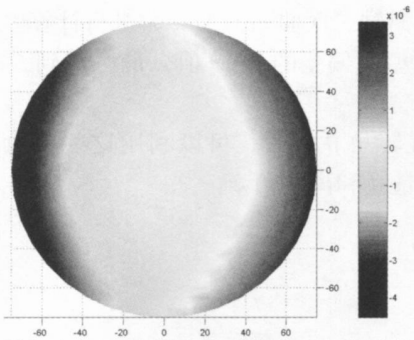

图 2 (a) 双曲面圆形镜面的拟合误差

Fig. 2 (a) Fitting error of hyperboloid mirror with circular shape

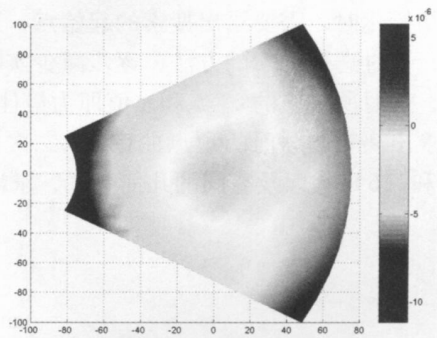

图 2 (b) 双曲面扇形镜面的拟合误差

Fig. 2 (b) Fitting error of hyperboloid mirror with sector shape

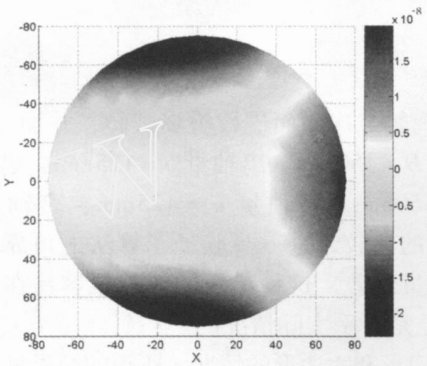

图 3 (a) 抛物面圆形镜面的拟合误差

Fig. 3 (a) Fitting error of paraboloid mirror with circular shape

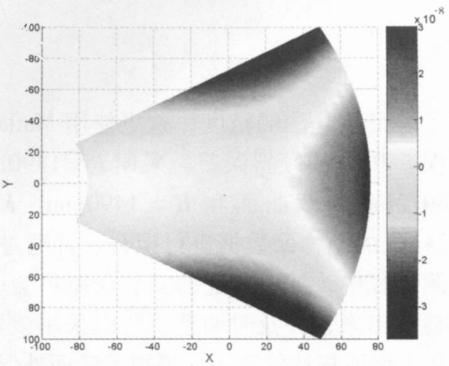

图 3 (b) 抛物面扇形镜面的拟合误差

Fig. 3 (b) Fitting error of paraboloid mirror with sector shape

根据计算结果，注意到离轴量和离轴角的估计值总是与理想值有近似固定的偏差。这是由于在对实际面型消除平移和倾斜误差时，选取的镜面中心不是实际的镜面几何中心，而是取面形边缘点连线的中垂线与实际面型的交点作为镜面的中心。这与实际检测情况是一致的。这时，所计算的镜面中心的离轴量和离轴角自然也发生改变。对于双曲面，理想的离轴量 $b = 125.1548$mm，离轴角 $\phi = 0.16918$ rad; 对于抛物面，理想的离轴量 $b = 125.1573$mm，离轴角 $\phi = 0.16919$ rad。从这个结果来看，计算所得离轴量和离轴角的精度也是可以满足要求的。

## 4 结 论

本文推导了一种根据测量的离散数据计算离轴二次曲面面型参数的方法。该算法不仅可以计算普通共轴非球面的参数如顶点曲率半径、二次曲面系数等，还可以计算离轴量和离轴角等离轴二次曲面特殊参数。这些参数对于大口径的拼接镜面是十分重要的。经验算表明，本算法的精度可以满足测量要求。

本方法可以与实时的检测技术相结合，利用干涉仪或轮廓仪的检测数据，了解已经加工好的或者是正在加工的镜面的质量，可以提高离轴非球面的加工效率，并为下一步的安装或者加工指明方向。

参考文献:

[1] 程灏波，王英伟，冯之敬. 光学非球面二次曲面常数及顶点曲率的研究 [J]. 光学技术，2004，30 (3): 311～314.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[2] Zheng Ligong, Xue Donglin, Zhang Xuejun. Computer Aided Alignment for Off - Axis Asphere Null Test [J]. SPIE., 2005, 5638: 319.

[3] D. Malacara. Optical Shop Testing [M], Engineering Industry Publishing Company, 1983. 436～439.

[4] Daniel Malacara. Some parameters and characteristics of an off - axis paraboloid [J]. Optical Engineering, 1991, 30 (9): 1277～1280.

[5] Octavio Cardona - Nunez, Alejandro Cornejo - Rodriguez, et al. Conic that best fits an off - axis conic section [J]. Applied Optics, 1986, 25 (19): 3585～3588.

[6] Jorge Nocedal, Stephen J Wright. Numerical Optimization [M]. Springer, 1999. 202～210.

# Algorithm for the Measurement of the Parameters of Off - axis Conic Surface

ZHOU Yang[1,2], LI Xin - nan[1]

(1. National Astronomical Observatories/Nanjing Institute of Astronomical Optics and Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042, China;

2. Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** To ensure the accuracy of conic surface in the fabrication of off - axis aspheric section, it is important to control the current surface parameters, such as the lateral displacement, tilt angle, the paraxial radius and the conic constant. From the normal equation for conic aspheric, new equation of conic aspheric was derived in new correlation system. Base on the new equation, the lateral displacement, tilt angle and the paraxial radius can be calculated with Conjugate Direction Method to minimize the RMS of deviation. The experimental result of the paraboloid and hyperboloid with different shapes are presented, the fitting accuracy arrived to 10nm rms. Thus the deviation of the off - axis aspheric section can be controlled effectively.

**Key words:** optical measurement; off - axis aspheric; paraxial radius; conic constant; lateral displacement; tilts angle; conjugate direction method

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net