杨德华

文章编号:1003-8728(2003)ZK-0114-04

一种双列调心球面球轴承刚度的计算及应用

杨德华,顾伯忠,崔向群
(中国科学院国家天文台 南京天文光学技术研究所,南京　210042)

摘　要:鉴于双列调心球面球轴承在大型精密仪器中的广泛使用,运用弹性接触理论推导出适合计算该类型轴承的刚度计算公式,用以仪器系统形变和位移的定量分析。并以一大型天文望远镜中所用的该轴承为例,计算了轴承的径向和轴向刚度,讨论了采用有限元法进行数值计算时,该双列调心球面球轴承的简化和有限元模型的建立。

关　键　词:双列调心球面球轴承;弹性接触刚度;有限元建模
中图分类号:TH133　　**文献标识码**:A

Stiffness Calculation and Application of Self-Aligning Ball Bearing

YANG De-hua, GU Bo-zhong, CUI Xiang-qun
(National Astronomical Observatories/Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042)

Abstract: Self-aligning ball bearing is widely adopted by large precision instruments due to its distinctive performance. For carrying out detailed investigation of a full instrument system, practical stiffness formulae of such a bearing are introduced with elastic contact mechanics, which are successfully applied to calculating the radial and axial stiffnesses of the bearing used by the large astronomical telescope, LAMOST. Appropriate treatment of the stiffnesses of such bearing in finite element analysis is discussed and illustrated at the end.

Key words: Self-aligning ball bearing; Elastic contact stiffness; Finite element analysis

轴承的刚度对整个仪器系统的力学计算和分析有着重要的意义[1]。双列调心球面球轴承由于具有自调心、高承载能力和可加预紧力的特点,为大型精密仪器所广泛选用。双列调心球面球轴承在工作条件下,表现为同时具有径向和轴向刚度,而目前尚没有直接可用于计算该类型轴承刚度的计算公式。运用弹性力学中成熟的接触刚度理论[2,3],可以推导出适用计算这种轴承的公式。获得了轴承刚度值,就可以用来进行整个仪器结构的力学分析。有限元方法是广泛采用的力学数值分析方法,由于双列调心球面球轴承的结构较为复杂,在运用有限元法对仪器进行分析计算时,需要进行必要的简化来模拟该轴承的刚度和运动特性。

1　双列调心球面球轴承之单颗钢球的刚度计算

图 1 为双列调心球面球轴承简图。轴承外径为 D_o,内径为 D_i,宽度为 B,外滚道球面直径为 D,接触角为 α,钢球直径为 d,每列钢球数为 z。

每颗钢球同时和轴承外圈及内圈接触,如果将两对弹性接触区看成线性弹簧的话,每颗钢球和轴承内外圈构成一对串联弹簧。于是,知道了两处的接触刚度,就可以按串联弹簧的合成刚度计算方法算得每颗钢球处的合成接触刚度。

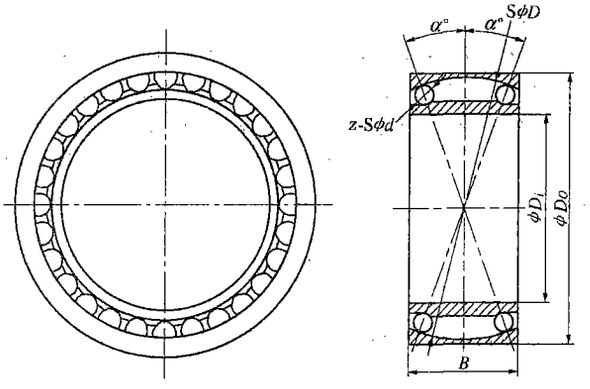

图 1　双列调心球面球轴承

由图 1 中该轴承结构形式可以看出,钢球和外圈之间属于内点接触问题,而和内圈之间为外接触的线接触问题,可以预见,当负载在一定的范围内,钢球与轴承内圈之间的接触刚度 k_i 将远远大于钢球与轴承外圈之间的接触刚度 k_o,综合刚度 k 将由刚度小得多的弹簧 k_o 决定,所以,可以仅考虑使用 k_o 来代替 k 以简化计算。下文分别推导 k_i 和 k_o 的公式,在具体计算某给定轴承的刚度时可以定量比较 k_i

收稿日期:2003-05-26
作者简介:杨德华(1973-),男(汉),安徽,工程师,博士研究生
E-mail:dhyang@lamost.org

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

和 k_o，以便更为精确地计算合成刚度 k。

1.1　钢球与轴承外圈之间的点接触

根据弹性点接触刚度理论[2]，在外载 p 作用下，两接触物体中心将移动距离为 δ

$$\delta = \lambda\sqrt[3]{\frac{9}{128}Ap^2\left(\frac{1-v_1^2}{E_1}+\frac{1-v_2^2}{E_2}\right)^2} \tag{1}$$

式中：A 为综合曲率或平均曲率；E_i 和 v_i 为接触物体的弹性模量和泊松比，按轴承常规材料，$E_i=210\times10^3\ \mathrm{Pa/mm^2}$，$v_i=0.3\ (i=1,2)$。

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1'}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2'}\right) \tag{2}$$

式中：R_i 和 $R_i'(i=1,2)$ 为接触物体在接触点的两个主曲率半径，曲率中心位于物体内，取正；而当曲率中心位于物体外时，则取负。

λ 为由下两式确定的参数，即

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)^2+2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)\cos(2\varphi)\right]^{1/2} \tag{3}$$

$$\cos\theta = \frac{B}{A} \tag{4}$$

式中：φ 为 R_1 和 R_2 两接触体相应主曲率半径所在平面之间的夹角。

根据所选用轴承的特性和参数，以任一颗钢球分析，参见图 1，这是属于内接触的点接触问题，以上相关参数为 $R_1=R_1'=d/2$，$R_2=R_2'=-D/2$，而 $\varphi=0°$；由式(2)可知，$A=2(1/d-1/D)$；式(3)比较复杂，但我们可以利用该研究对象的特点，得到 $B=0$，并直接由式(4)知 $\theta=90°$，查表可知 $\lambda=2.0$[3]，从而，由式(1)得 δ。

$$\delta = 4.388\times10^{-4}\times\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{D}\right)^{1/3}\times p^{2/3}\ \mathrm{mm} \tag{5}$$

所以，接触刚度

$$k_o = \frac{p}{\delta} = 2.279\times10^3\times\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{D}\right)^{-1/3}\times p^{1/3}\ \mathrm{N/mm} \tag{6}$$

可见，对于给定的轴承，钢球和外滚道之间的法向接触刚度 k_o 不为常数，而与 $p^{1/3}$ 成正比关系。

1.2　钢球与轴承内圈之间的线接触

这种情形属于外接触的线接触问题。将接触弧线展开拉直，钢球和内圈的接触可看作两圆柱之间的接触问题，两平行圆柱母线对压接触时，变形接触面为矩形，其半宽为 b[3]

$$b = \sqrt{\frac{4q}{\pi}\times\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\left(\frac{1-v_1^2}{E_1}+\frac{1-v_2^2}{E_2}\right)^2} \tag{7}$$

式中：q 为单位长度上的载荷。

两接触物体中心移动距离为 δ

$$\delta = \frac{2q}{\pi}\left[\frac{1-v_1^2}{E_1}\left(\ln\frac{2R_1}{b}+0.407\right)+\frac{1-v_1^2}{E_2}\left(\ln\frac{2R_2}{b}+0.407\right)\right] \tag{8}$$

E_i 和 v_i 同上，则式(7)和式(8)可简化为

$$b = 3.322\times10^{-3}\times\sqrt{q\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} \tag{9}$$

$$\delta = 2.759\times10^{-6}\times q\times\left(\ln\frac{4R_1R_2}{b^2}+0.814\right) \tag{10}$$

接触线长

$$l = 2\alpha R_1 \tag{11}$$

式中：α 为调心轴承接触角，由轴承本身参数选定；参见图 1，$R_1=d/2$，$R_2=(D-2d)/2$。

单位长度上的载荷

$$q = p/l = p/(\alpha d) \tag{12}$$

则

$$b = 2.349\times10^{-3}\times\sqrt{\frac{p}{\alpha}\cdot\frac{D-2d}{D-d}}\ \mathrm{mm} \tag{13}$$

$$\delta = 2.759\times10^{-6}\times\frac{p}{\alpha d}\times\left[\ln\frac{\alpha d(D-d)}{p}+12.922\right]\ \mathrm{mm} \tag{14}$$

所以，钢球与内圈的接触刚度

$$k_i = p/\delta = 3.625\times10^5\times\alpha d\times\left[\ln\frac{\alpha d(D-d)}{p}+12.922\right]^{-1}\ \mathrm{N/mm} \tag{15}$$

可见，k_i 也不为常数。

在轴承负载范围内，以上公式成立的前提下，比较式(6)和式(15)可见，钢球和轴承内圈的接触刚度 k_i 比钢球和外圈的接触刚度 k_o 约要大两个数量级，在随后的实例中可以看到定量的计算比较。

2　双列调心球面球轴承刚度计算

2.1　轴承径向刚度计算

一个单列轴承受载时，一般仅由对着受力方向上的一半的滚动体承载，如图 2 所示，点接触轴承及滚动体受载压力分布为[4]

$$F_0 = 4.37F_r/z \tag{16}$$

$$F_i = F_0\cos^{3/2}(i\varphi) \tag{17}$$

式中：z 为滚动体数目；$\varphi=2\pi/z$；F_r 为轴承整体所受径向外载；F_0 为受载方向上的滚动体所受的力；F_i 为各滚动体所受的力($i=1,2,\cdots,\mathrm{int}(z/4)$)，即相当于上文的外载 p。

则对于双列调心球面球轴承，参见图 3，对于径向载荷，两列钢球中处于受力方向上的钢球所受力 F_0^r 合成起来的等效力 F_{00}^r 即为图 2 中的 F_0，而

$$F_0^r = \frac{F_{00}^r}{2\cos\alpha} = \frac{4.37F_r}{2z\cos\alpha} = \frac{2.185F_r}{z\cos\alpha} \tag{18}$$

则每个钢球所受力 F_i^r 为

$$F_i^r = F_0^r\cos^{3/2}(i\varphi) = 2.185F_r\cos^{3/2}(2i\pi/z)/(z\cos\alpha)$$
$$i = 1,2,\cdots,\mathrm{int}(z/4) \tag{19}$$

结合式(6)，各钢球与轴承外圈之间的接触刚度为

$$k_i^r = 2.957\times10^3\times\left(\frac{F_r}{z\cos\alpha(1/d-1/D)}\right)^{\frac{1}{3}}\cos^{\frac{1}{2}}(2i\pi/z)$$
$$i = 1,2,\cdots,\mathrm{int}(z/4) \tag{20}$$

参见图 2，图 3，整个双列调心球面球轴承可合成为单

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

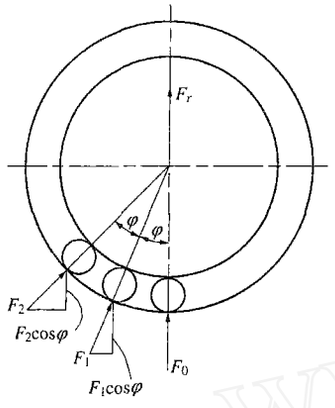

图2 轴承压力分布示意图

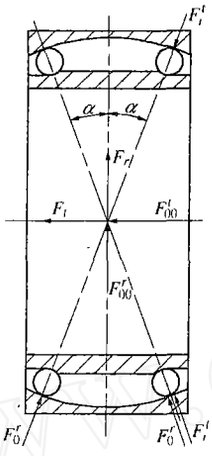

图3 双列球面球轴承钢球压力示意图

列球轴承，而其径向综合刚度 k_r 可由将所有参与工作的钢球的刚度沿径向并联起来求得，从而钢球与轴承外圈之间的径向综合刚度为 k_r

$$k_r = 2\sum_{i=0}^{n} 2k_i^r\cos^2\alpha = 4\sum_{i=0}^{n} 2k_i^r\cos^2\alpha \tag{21}$$

式中：$n=\mathrm{int}(z/4)$，结合式(21)

$$k_r = 1.183\times10^4\times\left(\frac{F_r}{z(1/d-1/D)}\right)^{1/3}\times \cos^{5/3}\alpha\cdot\sum_{i=0}^{n}\cos^{1/2}(2i\pi/z)\ \mathrm{N/mm} \tag{22}$$

由上述讨论知，双列调心球面球轴承的刚度主要由钢球和外圈之间点接触刚度决定，所以式(22)中 k_r 即可视为整个轴承的径向刚度，对于给定轴承，在得知负载 F_r 时，可由上式求得。

2.2 轴承轴向刚度计算

双列调心球面球轴承的轴向刚度由一圈钢球受载 F_t（比如预紧力）产生，每个钢球受力相等，即

$$F_i^t = \frac{F_t}{z\sin\alpha}\quad i=1,2,\cdots,z \tag{23}$$

同理，由式(6)知，每个钢球刚度为

$$k_i^t = 2.279\times10^3\times\left(\frac{F_t}{z\sin\alpha(1/d-1/D)}\right)^{1/3}\quad \mathrm{N/mm} \tag{24}$$

则，轴承的轴向综合刚度为

$$k_t = \sum_{i=1}^{z} 2k_i^t\sin^2\alpha = 4.558\times10^3\times [F_t/(1/d-1/D)]^{1/3}\cdot\sin^{5/3}\alpha\cdot z^{2/3}\ \mathrm{N/mm} \tag{25}$$

同2.1节，k_t 可视为双列调心球面球轴承的轴向刚度，对于给定轴承，在已知负载下可根据上式求得。

3 双列调心球面球轴承刚度计算实例

大天区面积多目标光纤光谱天文望远镜(LAMOST)选用了上海滚动轴承厂生产的D3517/500型可消隙的外圈分离式双列调心球面球轴承，对照图1，具体参数为：轴承外径 $D_o=720$，内径 $D_i=500$，外滚道球面直接 $D=695$，宽度 $B=300$，接触角 $\alpha=20°$，钢球直径 $d=55$ 及每列钢球数 $z=28$。按照式(6)，单颗钢球与外圈接触刚度为

$$k_o = 8.91\times10^3\times p^{1/3}\ \mathrm{N/mm} \tag{26}$$

按照式(15)，单颗钢球与内圈接触刚度为

$$k_i = 6.96\times10^6/(22.34-\ln p)\ \mathrm{N/mm} \tag{27}$$

可见，当轴承负载 p 在容许的范围之内，k_i 比 k_o 约高两个数量级，因此，以上讨论是成立的，即，轴承的刚度主要由钢球与外圈接触刚度 k_o 决定，从而简化了计算，可由式(22)和式(25)式直接计算双列调心球面球轴承的径向和轴向刚度。根据相关的分析计算已知轴承受径向压力为 $F_r=5.88\times10^4$ N，轴承受轴向力为 $F_t=3.97\times10^4$ N，则，带入上两式可以求得

$$k_r = 1.373\times10^4\times F_r^{1/3}\times\sum_{i=0}^{7}\cos^{1/2}(i\pi/14) = 3.06\times10^6\ \mathrm{N/mm} \tag{28}$$

略去径向压力方向上一半的钢球由径向力引起的轴向刚度，轴承轴向刚度

$$k_t = 2.75\times10^4\times F_r^{1/3} = 9.38\times10^5\ \mathrm{N/mm} \tag{29}$$

取得轴承刚度值后，再带回力学分析模型中进行最后分析。

4 有限元分析建模中的应用

大型复杂精密仪器的力学分析多采用有限元法[5]。由上文分析可知，轴承的刚度不是恒定的，而是直接与外载相关，给其数值的确定带来困难。为了求得它们的刚度，在运用有限元法进行分析中，先不考虑轴承的建模，而将该处约束，求得反力，按以上公式计算出轴承刚度后，再建入它们的有限元模型，重新进行分析计算[1]。

对于双列调心球面球轴承，当径向承载力 F_r 求得后，即可由式(22)求得轴承的径向刚度 k_r，而在有限元法中对轴承进行模拟时，由于用来模拟钢球的线弹簧数不一定等于周向钢球的个数，可以使得模拟弹簧的合成综合刚度等效于式(22)算得的刚度 k_r。同理，按式(25)可求得该轴承的轴向刚度。为了模拟调心球轴承的工作原理，轴向刚度可用一根直弹簧来模拟。轴承内外圈按它们的几何位置采用一个外圆环（可以就是轴承座外壳）和一个赋予了大刚度的圆盘（可以就是轴的端面）来模拟，径向由模拟轴承径向刚度的线弹簧连接外圆环和圆盘周边；盘心则和轴端相连，同时，盘心和轴承座（比如在盘的另一侧）由一根赋有了轴承轴向刚度的线弹簧相连，而轴承本身的重量可约略地归算到轴承内外圈的模型上或归算到轴承座的模型上。

图4为LAMOST水平轴所用的双列调心球面球轴承的有限元模型，轴向采用一根直弹簧模拟轴承轴向刚度，其刚度即为轴承的轴向刚度 9.38×10^5 N/mm，并与轴承座相连。轴由壳单元模拟并与模拟轴承内圈的圆盘的周边相连。轴承外圈和轴承重量归算到了轴承座的外壳的模型中。图中采用8根直弹簧模拟钢球，代入式(28)，每根弹簧赋予刚度为

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$k_i = \frac{k_r}{2(1+\sqrt{2})} = 6.34 \times 10^5\ \mathrm{N/mm} \qquad (30)$$

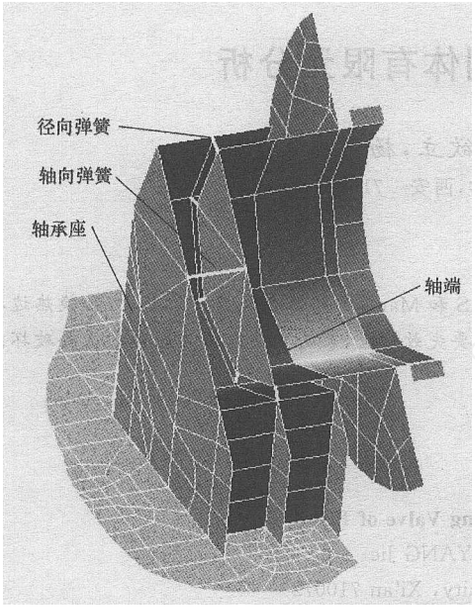

图 4　双列调心球面球轴承轴承 FEM 图

5　结束语

轴承的刚度对大型精密仪器的力学分析有着重要意义，双列调心球面球轴承由于具有良好的自调心等性能而为大型精密仪器广泛选用。文中推导了该种类型轴承的径向和轴向刚度的计算公式，讨论了轴承在运用有限元法进行分析时的简化和建模，并应用于大型天文望远镜的力学分析中。该计算公式和建模方法对于其它大型精密仪器的分析有着实用和借鉴价值。

[参考文献]

[1] 程景全. 天文望远镜原理和设计[M]. 中国科学技术出版社，2003

[2] 黄炎. 工程弹性力学[M]. 清华大学出版社，1982

[3] 中国大百科全书总编辑委员会《力学》编辑委员会. 中国大百科全书・力学(光盘 1.1 版)[M]. 中国大百科全书出版社，2000

[4] 中国机械工程学会中国机械设计大典编委会. 中国机械设计大典. 卷 2，4[M]. 江西科学技术出版社，2002

[5] Bely P Y. **The Design and Construction of Large Optical Telescopes**[M]. Springer-Verlag，2003

《国际设备工程与管理》(英文季刊)2003 年第 3 期目录

Information Technology Applications to Maintenance Management …… Abdul Raouf S. I. (129)

Detection and Diagnosis of Gear Fault By the Single Gear Tooth Analysis Technique … MENG Tao, LIAO Ming-fu(141)

The PLC Control System of Vacuum Resin Shot Dosing Equipment …… ZHU Shao-ying, XU Yu, HE Zheng-wen(149)

Fault Diagnosis for IC Engines Using Wavelet Packet and Image Processing …… ZHAO Hong, XIA Yong, LIANG Xiao-guo(154)

Application of Grey System Theory in Design For Cost (DFC) …… CHEN Xiao-chuan, FANG Ming-lun(163)

Extraction of Geometric Features of Wear Particles in Color Ferrograph Images Based on RGB Color Space …… CHEN Gui-ming, WANG Han-gong, ZHANG Bao-jun, PAN Wei(171)

Mechanical Fault Diagnosis Using Support Vector Machine …… LI Ling-jun, ZHANG Zhou-suo, HE Zheng-jia(179)

A Scheduling System Based on Rules of the Machine Tools in FMS …… LI De-xin, ZHAO Hua-qun, JIA Jie, LU Yan-jun(184)

Plans and Measures for Avoiding Casting-Air-Pollution …… ZHOU Jian(190)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net