

基于模态重建和改进自适应随机并行梯度的高精度相位恢复

方飞快^{1,2,3}, 李常伟^{2,3,4*}, 赖敏¹

¹南京信息工程大学物理与光电工程学院, 江苏 南京 210044;

²中国科学院南京天文光学技术研究所, 江苏 南京 210042;

³中国科学院南京天文光学技术研究所天文光学技术重点实验室, 江苏 南京 210042;

⁴中国科学院大学天文与空间科学学院, 北京 100049

摘要 针对相位恢复中收敛速度慢的问题, 提出一种适用于夏克哈特曼波前传感器的高精度相位恢复技术。该技术根据夏克哈特曼波前传感器的波前重构算法, 首先重构畸变波前, 然后将重构的波前作为改进自适应随机并行梯度下降 (ASPGD) 算法的初值, 进行迭代优化, 实现高精度相位恢复。这种模态法和 ASPGD 优化算法结合的相位恢复技术, 不仅可以大幅度提高相位恢复精度, 还可以加快相位恢复的收敛速度。数值仿真结果表明, 该技术可以将相位恢复精度提高 3 倍, 达到 $2\%_0\lambda$ 。与原随机并行梯度下降算法相比, 该算法对随机扰动系数的敏感性较低, 具有更大动态范围, 实用性更强。此外, 针对噪声导致的模态耦合问题, ASPGD 算法抗噪能力更强、相位恢复精度更高。

关键词 相位恢复; Zernike 多项式; 夏克哈特曼波前传感器; 模态法; 自适应随机并行梯度下降

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP242411

High-Precision Phase Retrieval for Shack-Hartmann Wavefront Sensors Using Modal Reconstruction and an Improved Adaptive Stochastic Parallel Gradient Descent Algorithm

Fang Feikui^{1,2,3}, Li Changwei^{2,3,4*}, Lai Min¹

¹School of Physics and Optoelectronic Engineering, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, Jiangsu, China;

²Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042, Jiangsu, China;

³Key Laboratory of Astronomical Optics & Technology, Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042, Jiangsu, China;

⁴School of Astronomy and Space Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract A high-precision phase recovery technique suitable for Shack-Hartmann wavefront sensors is proposed to tackle the issue of slow convergence in phase recovery. This technique leverages the wavefront reconstruction algorithm of the Shack-Hartmann wavefront sensor. First, the distorted wavefront is reconstructed, and the reconstructed wavefront is then used as the starting point for the improved adaptive stochastic parallel gradient descent (ASPGD) algorithm. This iterative optimization process achieves high-precision phase recovery. By combining the modal method with the ASPGD optimization algorithm, this technique significantly enhances the accuracy of phase recovery and accelerates its convergence speed. The numerical simulation results demonstrate that this technology improves the phase recovery accuracy by three times, achieving a precision of $2\%_0\lambda$. Compared with the original stochastic parallel gradient descent algorithm, the proposed ASPGD algorithm exhibits lower sensitivity to random perturbation coefficients, a larger dynamic range, and greater practicality. In addition, when addressing noise-induced modal coupling issues, the ASPGD algorithm exhibits superior noise resistance and higher phase recovery accuracy.

Key words phase retrieval; Zernike polynomial; Shack-Hartmann wavefront sensor; modal method; adaptive stochastic parallel gradient descent

收稿日期: 2024-12-11; 修回日期: 2024-12-20; 录用日期: 2025-01-02; 网络首发日期: 2025-01-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(11873069)、中国科学院青年创新促进会(2019064)

通信作者: *cwli@niaot.ac.cn

1 引言

在光学成像、激光物理和天文学等领域,获取光场的相位信息对于准确表征光学系统和优化成像质量至关重要。然而,实际测量中,只能获得光场的强度信息,而无法直接获得相位信息。因此,相位信息提取问题成为光学和计算成像研究中的核心挑战之一。相位测量,作为一个经典的物理逆问题,旨在通过测得的光强分布反演出光场的相位。

目前,相位信息的获取通常依赖于干涉法^[1]、全息技术^[2-3],以及波前传感器^[4]等测量手段。光学干涉仪可以通过对干涉条纹的分析来间接恢复相位信息,全息成像则通过记录光波的振幅和相位来重建目标物体的三维结构。这些实验方法虽然能够有效地获取相位信息,但实验装置较复杂,测量过程中容易受到环境干扰(如温度变化、机械振动和光源稳定性等因素),导致测量精度下降。波前传感是测量畸变相位的另一种重要手段,包括夏克哈特曼传感器^[5-6]、曲率传感器^[7]、四棱锥传感器^[8]等。其中,夏克哈特曼波前传感器是使用最广泛的一种。夏克哈特曼传感器的优点在于结构紧凑、简单、不受波长限制、信噪比高。但是,夏克哈特曼传感器的传感精度受限于子孔径数目,特别是对高频像差重构精度更低。因此,物理测量方法在实际应用中具有一定的局限性,尤其是在高分辨率成像和大规模数据采集的场景下,获取相位信息的过程往往成本高昂且难以实现。

为了克服这些限制,近年来多种基于优化算法^[9]的相位恢复技术被提出。这些技术通过已知的振幅信息和对信号或图像的结构性约束来恢复相位。例如,Gerchberg-Saxton(GS)算法^[10]是最早期的相位恢复算法之一,其通过傅里叶变换在频域和空域之间迭代更新获取相位信息。随后,Fienu^[11-12]改进了这一算法,提出加权GS算法,通过引入权重因子,使得不同区域的振幅约束影响不同,在一定程度上提高了相位恢复的精度和稳定性。然而,传统的迭代方法在处理复杂相位恢复问题时,往往容易受到噪声和局部极小值的影响。由于相位的非唯一性及恢复过程的非线性特性,这一过程依赖于高效的数值算法和先验信息。随着计算能力和优化算法的发展,特别是机器学习和优化算法的进步,越来越多的相位恢复方法应运而生,不断推动相位恢复技术的发展。近年来,随机并行梯度下降(SPGD)算法作为一种无模型梯度下降方法,逐步被运用于相位恢复中^[13]。但是,如果不能提供合适的初始值,也可能会导致收敛速度慢,甚至出现收敛于局部最小的情况。因此,初始值的合理选取,对相位恢复至关重要。

本文提出一种基于改进的自适应随机并行梯度下降(ASPGD)算法,并将其应用于夏克哈特曼波前传感器的波前重建环节,从而实现高精度的相位恢复。该

算法结合了夏克哈特曼传感器快速重构波前和相位恢复精度高的优点,实现了基于夏克哈特曼传感器的快速、高精度相位恢复。首先,根据夏克哈特曼波前重构原理,通过模态法构建波前相位梯度的矩阵方程,快速求解 Zernike 多项式系数。然后,将模态法得到的 Zernike 多项式系数作为 ASPGD 优化算法的初始值,迭代优化模态系数,得到优化相位。与传统算法相比,该算法的光路结构简单、易于实现,且在仿真实验中具有更高的精度、较强的实用性和鲁棒性。

2 基本原理

基于模态重建和改进随机并行梯度的相位恢复基本原理是通过 ASPGD 算法迭代优化夏克哈特曼传感器模态法重建的模态系数,恢复出最优的入射波前,从而实现高精度相位恢复。

2.1 基于夏克哈特曼传感器的相位重建基本原理

入射到测量系统的光场复振幅 $E(x, y)$ 在笛卡儿坐标下可以表示为

$$E(x, y) = A(x, y) \exp[iW(x, y)] \quad (1)$$

式中: $A(x, y)$ 为入射光场的振幅; $W(x, y)$ 为畸变波前。 $W(x, y)$ 可以用 Zernike 多项式的各项模态线性组合表示:

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^N a_n Z_n(x, y) \quad (2)$$

式中: a_n 表示第 n 阶模态系数; N 表示总模态系数; $Z_n(x, y)$ 表示第 n 阶 Zernike 多项式。

在波前测量中,夏克哈特曼传感器通过微透镜阵列和位于微透镜焦面的图像传感器来获取波前信息。首先通过微透镜阵列将入射波前分割为一系列子光束,子光束在不同微透镜的作用下形成一个子光斑。在理想情况下,子光斑会聚在焦平面与对应微透镜光轴的交点位置;存在畸变的情况下,畸变波前的局部倾斜会导致光斑位置的偏移,如图 1 所示。

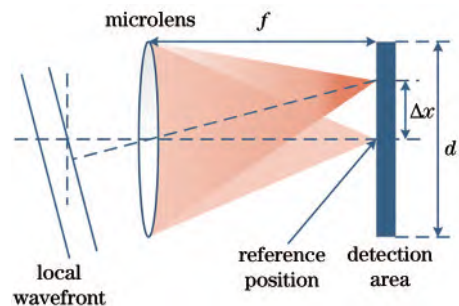


图 1 单个微透镜局部倾斜几何关系示意图

Fig. 1 Geometric relationship of the local slope for a single lens

根据光斑的偏移量,计算波前在两个方向上的局部倾斜:

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = \frac{\Delta x \cdot d}{f} k \\ \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \frac{\Delta y \cdot d}{f} k \end{cases} \quad (3)$$

式中: Δx 和 Δy 是光斑点相对于理想位置的偏移量; d 表示单个小微透镜的直径; f 是透镜的焦距; k 是波矢大小。将畸变波前 Zernike 多项式线性组合表达式代入式(3), 可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{n=1}^N a_n \frac{\partial Z_n}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{n=1}^N a_n \frac{\partial Z_n}{\partial y} \end{cases} \quad (4)$$

通过式(4)的线性方程组可以构筑矩阵方程^[14-15]: $d\mathbf{W} = \mathbf{a} \times d\mathbf{Z}$, 向量 $d\mathbf{W}$ 为斜率方向向量, 向量 \mathbf{a} 为模态系数向量, 矩阵 $d\mathbf{Z}$ 由 Zernike 多项式的各模态对 x 方向和 y 方向的偏导数构成。通过将斜率方向向量 $d\mathbf{W}$ 与 $d\mathbf{Z}$ 的广义逆矩阵相乘, 可以得到模态系数向量 \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = d\mathbf{W} \times \text{pinv}(d\mathbf{Z}) \quad (5)$$

式中: pinv 表示求矩阵的广义逆。

夏克哈特曼传感器模态重建的目标是通过测量入射波前的局部倾斜来重建入射波前的模态系数, 并将其作为下一步 ASPGD 迭代优化的初始值。

2.2 ASPGD 优化算法

SPGD 算法是一种基于随机优化的迭代算法, 适用于变量较多, 无法建立准确数学模型的控制过程, 主要解决系统性能指标无法直接计算梯度的优化问题。该算法通过引入随机扰动和系统响应的反馈, 迭代调制控制参数。与标准的梯度下降方法相比, SPGD 算法不直接计算精确的梯度, 而是基于多个并行的随机扰动估计出近似梯度, 从而更新优化参数。SPGD 对随机扰动幅值、迭代步长等优化参数十分敏感, 对不同的问题, 需要对参数进行精细化选择。Adam 由 Kingma 等^[16-18]提出, 是一种自适应的随机优化算法。Adam 结合动量法和 RMSProp 两种方法, 通过计算评价函数梯度的一阶矩估计和二阶矩估计来动态调整参数的学习率, 可以降低优化算法对参数的敏感性, 从而实现更高效的梯度下降。

ASPGD 算法的基本思想是在 SPGD 算法的基础上采用 Adam 算子进行改进, 增加 SPGD 算法的迭代效率^[19-21]。将 ASPGD 算法应用于相位恢复领域可以提高相位恢复效率, 降低算法对扰动幅值、迭代步长等参数的敏感性, 其流程图如图 2 所示。

首先, 将上一节夏克哈特曼传感器模态重建得到的模态系数作为 ASPGD 算法的初始输入系数向量 \mathbf{a}_0 。算法随机生成扰动系数向量 $\Delta \mathbf{a}_i$, 向量内各扰动系数相互独立并且服从伯努利分布, 即满足幅值 Δa 相同和正负概率相等。定义评价函数 J 为迭代计算的衍射

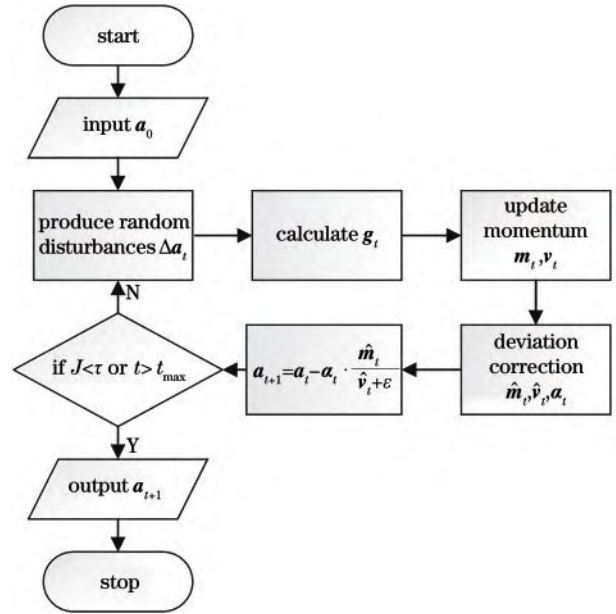


图 2 ASPGD 算法流程图

Fig. 2 Flow chart of ASPGD

光强分布矩阵 I_i 平方与微透镜阵列焦平面测量得到的衍射光强分布矩阵 I 平方的相对残差:

$$J = \frac{\sum \sum |I_i^2 - I^2|}{\sum \sum I^2} \quad (6)$$

式中: I 为 CCD 记录的光强分布。CCD 位于微透镜阵列焦平面上, 如图 3 所示。 I_i 为计算得到的光强分布, 是微透镜阵列瞳面光场传播到微透镜焦平面形成的强度分布, 传播过程采用角谱衍射公式^[22]仿真实现。瞳面光场可根据式(1)得到, 波前是 Zernike 多项式的线性组合, 系数为模态系数向量 \mathbf{a}_i , 振幅为瞳函数实部。

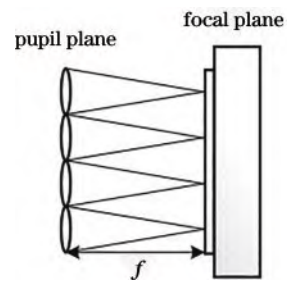


图 3 迭代衍射过程的光路示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the optical path of the iterative diffraction process

通过计算评价函数在模态系数加减扰动量后的变化, 估计评价函数的变化量 ΔJ 。根据泰勒展开, 评价函数的梯度向量 \mathbf{g}_i 为

$$\mathbf{g}_i = \frac{\Delta J(\mathbf{a}_i) \cdot \Delta \mathbf{a}_i}{2(\Delta a)^2} = \left[J(\mathbf{a}_i + \Delta \mathbf{a}_i) - J(\mathbf{a}_i - \Delta \mathbf{a}_i) \right] \cdot \frac{\Delta \mathbf{a}_i}{2(\Delta a)^2} \quad (7)$$

当评价函数在平坦区域,即梯度很小时,原始 SPGD 的迭代步长很小,算法更新很慢,因此引入动量项来加速收敛。在 Adam 中,动量项被称为一阶矩 m_t :

$$m_t = \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot g_t \quad (8)$$

式中: β_1 为一阶矩衰减系数。动量项通过引入历史梯度的指数加权平均来平滑当前的梯度更新,能够在平坦区域中加速更新,从而提高收敛速度。另外,Adam 还引入梯度的二阶矩 v_t :

$$v_t = \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1 - \beta_2) \cdot g_t^2 \quad (9)$$

式中: β_2 为二阶矩衰减系数。二阶矩是梯度平方的指数加权平均,表示梯度的无中心方差。一阶矩主要关注梯度的平均值,用于加速收敛;而二阶矩关注梯度的变化幅度,用于自适应调整学习率来应对不同尺度的参数变化,保持稳定性。通过梯度的一阶矩和二阶矩来更新参数:

$$a_{t+1} = a_t - \alpha \cdot \frac{m_t}{\sqrt{v_t} + \epsilon} \quad (10)$$

式中: α 为学习率; ϵ 为无穷小量,用于避免数值计算错误。

在迭代初期,由于一阶矩和二阶矩的初始值设置为零向量,计算的动量项和二阶矩会被低估,因此需要进行校正:

$$\begin{cases} \hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t} \\ \hat{v}_t = \frac{v_t}{1 - \beta_2^t} \end{cases} \quad (11)$$

式中: \hat{m}_t 和 \hat{v}_t 是经过偏差校正的一阶矩和二阶矩。此外,过大的学习率会降低收敛性能,适当降低学习率,在接近最优解时减小步长,以更精细地优化参数。因

此引入 cosine decay 余弦算子来调整学习率,学习率 α_t 可以表示为

$$\alpha_t = \alpha_{\min} + \frac{1}{2}(\alpha_{\text{initial}} - \alpha_{\min}) \left[1 + \cos\left(\frac{t}{t_{\max}} \pi\right) \right] \quad (12)$$

式中: α_{initial} 为初始学习率; t_{\max} 为最大迭代步数。修正过后,第 t 次迭代过程中的模式系数向量 a_{t+1} 的更新公式为

$$a_{t+1} = a_t - \alpha_t \cdot \frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t} + \epsilon} \quad (13)$$

当满足阈值条件 $J < \tau$ 或达到最大迭代步数 t_{\max} 时,输出最终优化的模式系数。根据式(2),将模式系数与 Zernike 多项式相乘得到优化相位。

3 模拟仿真及结果与分析

3.1 夏克哈特曼波前传感器模拟及成像仿真

为了验证算法的可行性,本文建立数值仿真光路系统进行模拟实验,其示意图如图 4 所示。畸变波前首先入射到缩束器,调制成与夏克哈特曼波前传感器尺寸相近的光束,再经过分束器分为两束光。两束光经过相同的光程,一束光在 CCD 上成瞳面像,如图 4(a) 所示。另一束光入射到微透镜阵列上,经微透镜聚焦,在 CCD 上形成子光斑阵列,如图 4(c) 所示。图 4(b) 为仿真 16×16 微透镜阵列的相位示意图,单个微透镜的直径为 $150 \mu\text{m}$,焦距为 4.1 mm 。CCD 采样平面大小为 $480 \text{ pixel} \times 480 \text{ pixel}$ 。

3.2 相位恢复结果比较

本文相位恢复的精度以残差相位(恢复相位和输入相位的差)的峰谷值(PV)和均方根值(RMS)来表示。PV 值定义为残差相位的最大值与最小值之间的差,PV 值描述了残差的最大偏差。RMS 是相位与相

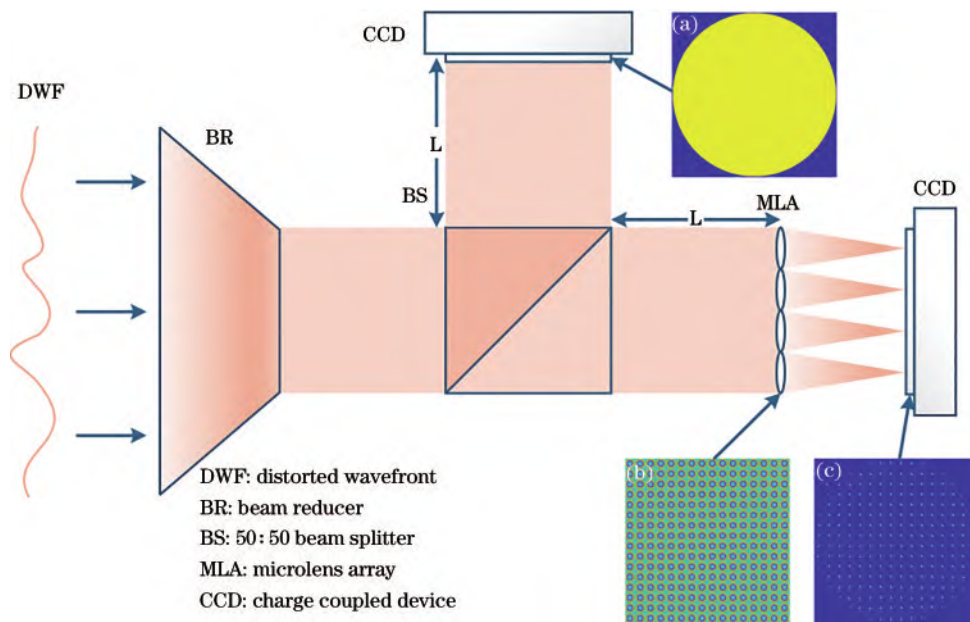


图 4 仿真光路示意图。(a)光瞳面成像;(b)微透镜阵列;(c)焦平面成像

Fig. 4 Schematic diagrams of the simulated optical path. (a) Pupil plane image; (b) microlens arrays; (c) focal plane imaging

位平均值差值的平方和的均方根,即相位误差在整个波前上的平均分布。与 PV 值不同,RMS 值更加关注全局误差的大小,而不仅仅是最大误差。它们的计算公式为

$$\begin{cases} V_{PV} = \Delta W(x, y)_{\max} - \Delta W(x, y)_{\min} \\ V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \Delta W^2(x, y)} \end{cases} \quad (14)$$

式中: $\Delta W(x, y)$ 为残差相位; M 表示数据点个数。

残差的 PV 值与 RMS 值越低,说明恢复相位的越好,本文通过计算模态法和优化算法残差的 RMS 值之比,来评估优化算法对相位恢复精度的改善情况。ASPGD 算法的初始学习率设置为 0.001, β_1 取经验值 0.9, β_2 取经验值 0.999^[16],评价函数阈值 τ 为 0.005,最大迭代步数 t_{\max} 设置为 500。图 5 是在相同输入相位下,

模态法与所提模态法结合 ASPGD 优化算法的相位恢复结果的比较。输入相位的 Zernike 多项式模态阶数为 65,相位的 PV 值为 1.27λ ,本文所有相位分布的单位均以光波波长 λ 为单位,数值为 632.8 nm。数值仿真结果显示,模态法的相位残差 PV 值为 0.13 λ ,RMS 值是 0.010 λ ,而所提算法恢复结果的残差 PV 值为 0.02 λ ,RMS 值为 0.003 λ 。相比于模态法的重建结果,优化后,PV 值显著降低,精度提高了 3.5 倍。从恢复相位残差的精度上能明显看出,在模态法的基础上使用 ASPGD 优化算法能显著提高相位恢复的精度,残差更趋于平缓,这表明 ASPGD 在高频相位恢复方面明显更接近真实相位。输入相位与恢复相位的 Zernike 系数对比如图 6 所示。模态系数绝对均值的相对误差从原来的 4.7% 下降到了 1.4%,使用优化算法 ASPGD 优化的模态系数更接近于实际值,结果更精确。

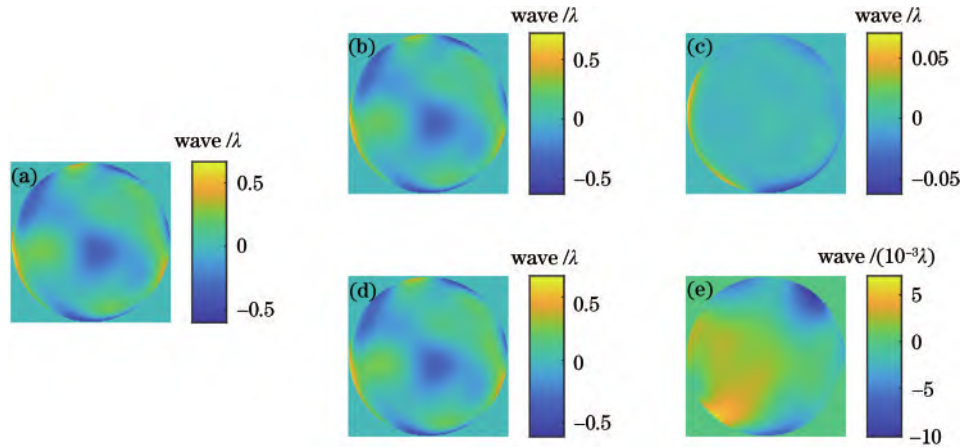


图 5 相位恢复结果图。(a)输入相位;(b)(c)模态法相位恢复结果及相位恢复残差;(d)(e)所提算法相位恢复结果及相位恢复残差
Fig. 5 Results of phase recovery. (a) Input phase; (b) (c) phase recovery results reconstructed by the modal algorithm and the corresponding residual; (d) (e) phase recovery results by the proposed algorithm and the corresponding residual

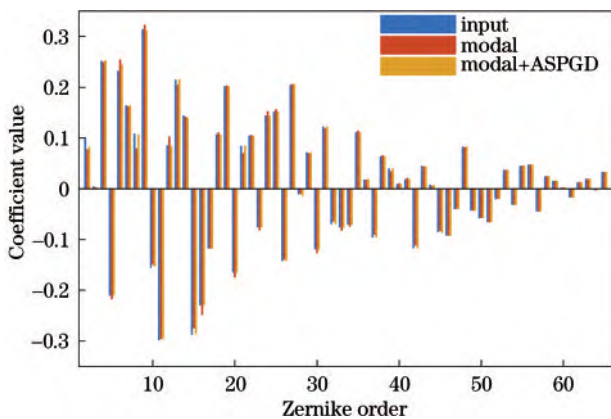


图 6 输入相位与恢复相位的 Zernike 系数对比
Fig. 6 Comparison of the Zernike coefficients between the input phase and the recovery phase

为了比较有无模态系数初值对 ASPGD 优化算法的影响,初始值设为 0,对图 5 所示的入射相位进行相位恢复,评价函数曲线如图 7 所示。从图中可以看出,初值为 0、迭代次数达到 1000 时,评价函数才接近所提

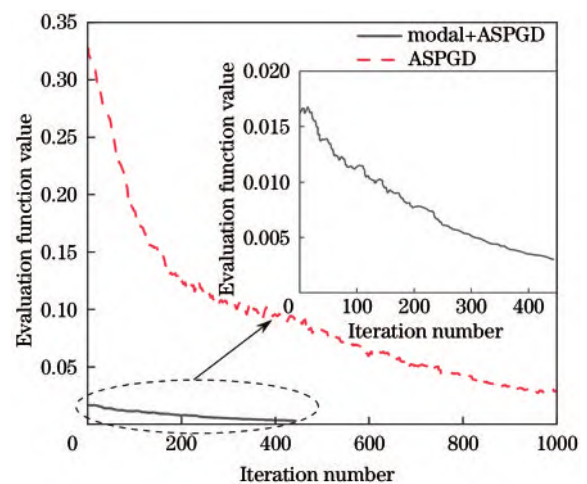


图 7 评价函数变化曲线
Fig. 7 Evaluation of the cost function

算法的初始评价函数值。由此可见,将 ASPGD 优化算法结合模态法提取的相位作为初值能显著减少迭代步数,缩短计算时间。

3.3 ASPGD 收敛速度分析

收敛速度在很大程度上依赖于学习率和扰动幅值,本小节将分析这两个参数对 ASPGD 算法收敛特性的影响。

图 8 和图 9 分别展示了不同学习率和不同扰动系数下的评价函数。可以看出:当学习率较大时,收敛速度较慢,且容易出现振荡;而当学习率过小时,尽管避免了振荡,但收敛速度也会变慢。因此,选择一个合适的学习率范围至关重要。在我们的实验中,选择 0.001 的学习率,ASPGD 算法能够快速且稳定地收敛。相比之下,当学习率过大或过小时,算法的收敛速度和稳定性都会受到不同程度的影响。而不同扰动系数幅值对 ASPGD 的收敛速度影响较小。初始参数的选择虽然对收敛速度有一定影响,但对精度的影响不显著,精度方面的讨论将在下一小节中展开。

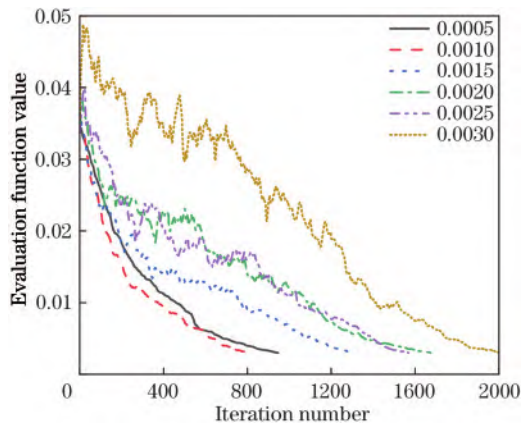


图 8 不同学习率下的评价函数

Fig. 8 Evaluation function of different learning rates

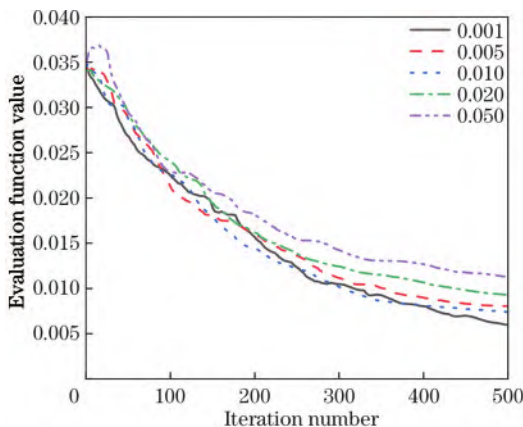


图 9 不同扰动系数下的评价函数

Fig. 9 Evaluation function of different disturbance coefficients

3.4 ASPGD 与 SPGD 算法的比较

扰动系数幅值 Δa 是相位恢复的核心参数,对相位恢复有重要影响。为了分析扰动系数幅值 Δa 对 ASPGD 算法和 SPGD 算法的影响,在较大范围内选取扰动幅值,比较相位恢复的残差,结果如表 1 所示。输入相同的相位,PV 值为 2.81λ 。ASPGD 算法的学习率

表 1 不同扰动系数幅值下 ASPGD 与 SPGD 的相位恢复残差

Table 1 The residuals of ASPGD and SPGD under different values of Δa

Δa	PV / λ		RMS / λ	
	modal + ASPGD	modal + SPGD	modal + ASPGD	modal + SPGD
0.001	0.02	0.24	0.003	0.017
0.005	0.02	0.02	0.003	0.003
0.010	0.02	0.13	0.003	0.011
0.020	0.03	0.72	0.004	0.091
0.050	0.09	13.91	0.008	0.742

为 0.001,SPGD 算法的学习率为 30。由于未加噪声,模态法每次求解的系数相同,残差 PV 值为 0.27λ ,RMS 值为 0.020λ 。 Δa 很小时,SPGD 算法提升精度十分有限;逐步提高 Δa ,算法提升精度显著;进一步提高 Δa ,SPGD 算法的精度开始直线下降,评价函数开始发散。SPGD 算法需要有较多的前期准备,调整合适的参数才能正常优化, Δa 仅在 0.005~0.01 的小范围内才能出现较好的优化效果。而 ASPGD 算法在较大范围的扰动系数幅值下,依旧能保持较高的恢复精度,表明 Δa 对该算法的影响较小,该算法更适宜实际应用。

对于各种优化算法,初始学习率很大程度上决定了迭代的步长。为了分析较高学习率对 ASPGD 算法和 SPGD 算法的影响,取 ASPGD 算法的学习率为 0.003,SPGD 算法的学习率为 130。在相同的输入相位下,评价函数曲线如图 10 所示。由图 10 易知,SPGD 算法在面对较高的学习率时,评价函数会发散且来回振荡。而所提改进的 ASPGD 算法在面对较高初始学习率时,虽然迭代初期也会出现发散,但是该算法会自适应地调节学习率,在收敛后期,能以稳定的梯度下降。相位恢复效果如图 11 所示。SPGD 算法恢复相位的残差 PV 值为 0.17λ ,RMS 值为 0.025λ ,较模态法恢复的结果精度下降,未能达到理想的恢复精度。ASPGD 算法恢复相位的残差 PV 值为 0.03λ ,RMS 值为 0.005λ ,精度显著提高,与表 1 中的结果一致。

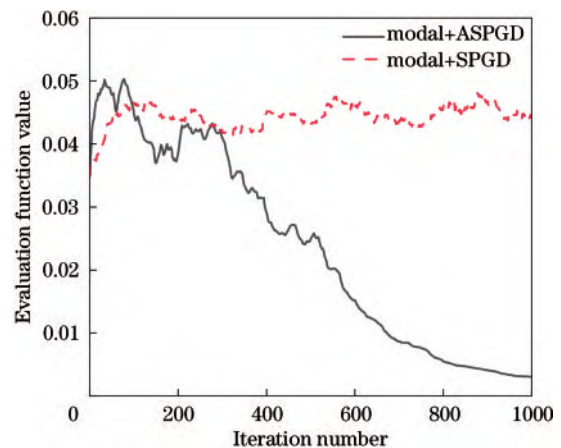


图 10 评价函数变化曲线

Fig. 10 Evaluation function variation curves

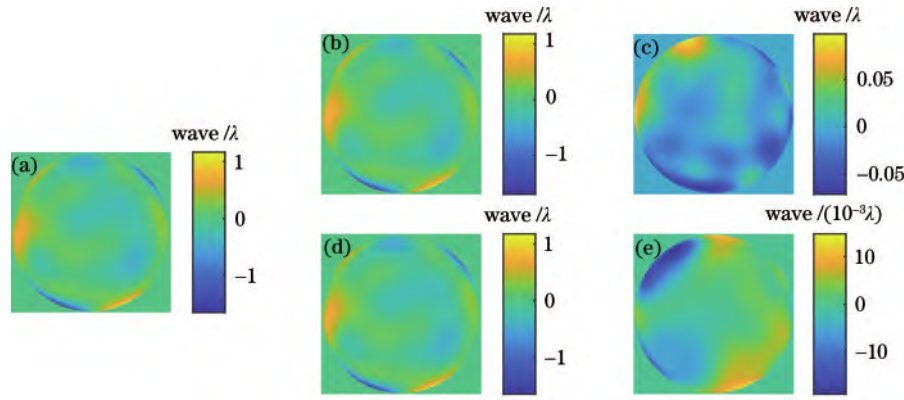


图 11 相位恢复结果图。(a)输入相位;(b)(c)SPGD算法相位恢复结果及相位恢复残差;(d)(e)所提算法相位恢复结果及相位恢复残差
Fig. 11 Results of phase recovery. (a) Input phase; (b) (c) phase recovery results reconstructed by the SPGD algorithm and the corresponding residual; (d) (e) phase recovery results by the proposed algorithm and the corresponding residual

ASPGD算法相比于SPGD算法在面对较高学习率时能够更好地控制梯度下降过程,有效削弱了振荡现象,并实现了精度更高的相位恢复。通过自适应学习率的调整,ASPGD算法在处理相位恢复问题时表现出了优越的性能。

3.5 稳定性分析

由于该算法是基于随机数生成的扰动系数来恢复相位的,恢复结果具有一定的随机性,通过在不同输入相位下进行模拟仿真,可以测试算法恢复相位的稳定性。仿真总共进行100次,其中,部分随机输入相位的相位恢复残差如表2所示,输入相位PV值在 $0.94\lambda \sim 3.32\lambda$ 之间。模态法计算的相位残差PV值为 $(0.14\lambda \pm 0.06\lambda)$,ASPGD算法优化后的PV值为 $(0.03\lambda \pm 0.01\lambda)$,相较于模态法,残差的PV值降低到原来的0.19。模态法计算的相位残差RMS值为 $(0.011\lambda \pm 0.003\lambda)$,ASPGD算法优化后的RMS值为 $(0.004\lambda \pm 0.001\lambda)$,精度提高了3倍,提升效果显著,表明了该算法能稳定提升模态法的相位恢复精度。

3.6 噪声鲁棒性

由于在实际实验测量中,不可避免会引入噪声,为

表2 部分随机输入相位的相位恢复残差

Table 2 The residuals of the partial random input phase

No.	PV / λ	PV / λ		RMS / λ	
		modal	modal + ASPGD	modal	modal + ASPGD
1	1.36	0.12	0.02	0.009	0.002
2	0.94	0.09	0.02	0.006	0.003
3	1.27	0.13	0.02	0.009	0.003
4	0.98	0.08	0.02	0.007	0.002
5	1.19	0.11	0.02	0.010	0.002
6	1.98	0.14	0.02	0.012	0.003
7	2.53	0.19	0.04	0.014	0.007
8	1.40	0.16	0.03	0.012	0.005
9	2.39	0.20	0.03	0.016	0.005
10	1.36	0.27	0.03	0.016	0.003

了验证算法的抗噪声性能,在微透镜阵列焦平面光强分布矩阵I中加入高斯噪声或泊松噪声,噪声的信噪比(SNR)^[23]的公式如下:

$$R_{SN} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\mu_s^2}{\sigma_n^2} \right) \quad (15)$$

式中: μ_s 是信号图像的均值; σ_n^2 是噪声的方差。模拟仿真时输入相位的PV值为 1.16λ ,分别以SNR值为30、25、20、15、10、5来模拟噪声对算法的影响,结果如表3所示。从表中可以看出:在噪声较低时,仅用模态法就能得到较高精度的相位;在噪声强度较高时,噪声对模态法影响较为明显。图12为高斯噪声下信噪比为5 dB时的相位恢复结果图。结合图13的Zernike模态系数图可知,有噪声干扰时,模态法重构的残余相位RMS值很小,但是模态系数准确性较低。这种解源于Zernike导数不正交而引入的模态耦合^[15],普遍体现为低阶Zernike系数偏差较大,高阶分量偏差较小。迭代法对系数的优化减小了模态耦合问题中的偏差。对于泊松噪声的干扰,应用ASPGD算法优化后,残差相位的PV值为 0.09λ ,RMS值为 0.012λ ,

表3 不同信噪比下不同噪声类型的相位恢复残差

Table 3 The residuals with different noise types under different SNR

Noise type	SNR / dB	PV / λ		RMS / λ	
		modal	modal + ASPGD	modal	modal + ASPGD
Gaussian	30	0.15	0.02	0.009	0.003
	25	0.16	0.02	0.009	0.005
	20	0.18	0.02	0.009	0.002
	15	0.21	0.02	0.011	0.005
	10	0.27	0.04	0.015	0.006
	5	0.39	0.07	0.024	0.009
Poisson	30	0.14	0.01	0.009	0.002
	25	0.12	0.01	0.008	0.002
	20	0.13	0.04	0.010	0.003
	15	0.17	0.04	0.009	0.004
	10	0.34	0.06	0.019	0.009
	5	0.58	0.09	0.037	0.012

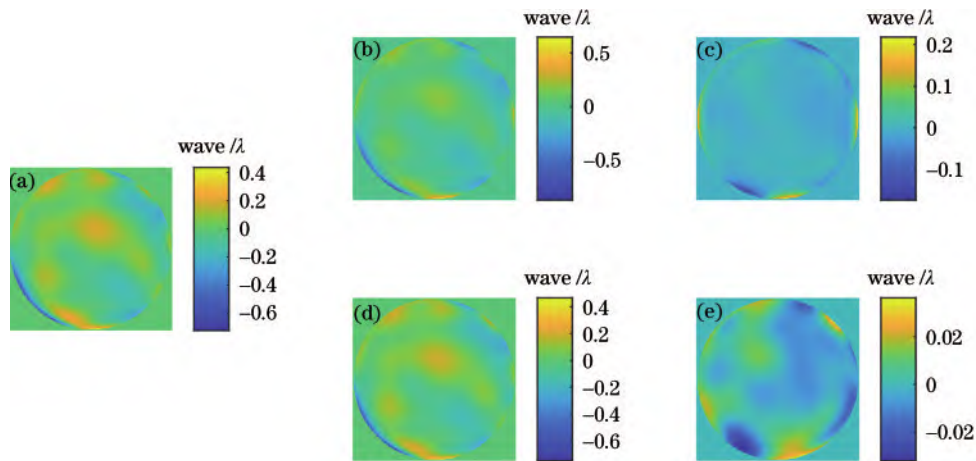


图 12 高斯噪声信噪比为 5 dB 时的相位恢复结果图。(a)输入相位;(b)(c)模态法相位恢复结果及相位恢复残差;(d)(e)所提算法相位恢复结果及相位恢复残差

Fig. 12 Results of phase recovery at a Gaussian noise signal-to-noise ratio of 5 dB. (a) Input phase; (b) (c) phase recovery results reconstructed by the modal algorithm and the corresponding residual; (d) (e) phase recovery results by the proposed algorithm and the corresponding residual

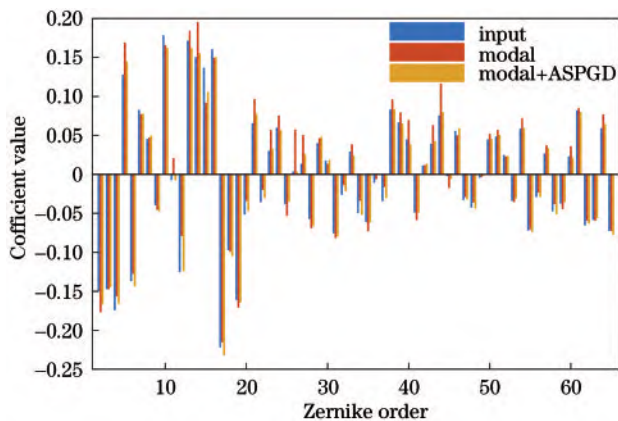


图 13 高斯噪声信噪比为 5 dB 时恢复的 Zernike 系数

Fig. 13 Zernike coefficients recovered at a Gaussian noise signal-to-noise ratio of 5 dB

相对于模态法, PV 值降低到原来的 0.15, 相位恢复精度提高了 3.1 倍, 算法优化效果显著, 具有很好的抗噪性和鲁棒性。

4 结 论

本文提出一种基于自适应随机梯度下降算法的相位恢复算法, 该算法结合了夏克哈特曼传感器模态法与 ASPGD 优化算法的优势, 模态法解决了迭代法初值的问题, ASPGD 算法能自适应调整学习率进行迭代计算, 提高了算法的效率。仿真实验结果表明, 相较于模态法, 该算法将相位恢复精度提高了 3 倍, 达到 $2\%_0\lambda$ 。与原 SPGD 算法相比, 所提算法对随机扰动系数不敏感, 能在较大范围内稳定提升相位恢复精度。同时, ASPGD 算法对噪声具有一定的鲁棒性, 即使信噪比较低的情况下, 也依然能得到高精度的恢复相位结果。一系列仿真实验表明, 该算法精度高、参数调整

简单、抗噪声干扰能力强等, 且所需光路简单, 在实际相位恢复的实验中具有重大潜力。

参 考 文 献

- [1] CuChe E, Bevilacqua F, Depeursinge C. Digital holography for quantitative phase-contrast imaging[J]. Optics Letters, 1999, 24(5): 291-293.
- [2] Schnars U, Jptner W P O. Digital recording and numerical reconstruction of holograms[J]. Measurement Science and Technology, 2002, 13(9): R85-R101.
- [3] Tahara T, Quan X Y, Otani R, et al. Digital holography and its multidimensional imaging applications: a review [J]. Microscopy, 2018, 67(2): 55-67.
- [4] Liu C, Wang S Y, Veetil S P. Computational optical phase imaging[M]. Singapore: Springer, 2022: 167-176
- [5] Saita Y, Shinto H, Nomura T. Holographic Shack-Hartmann wavefront sensor based on the correlation peak displacement detection method for wavefront sensing with large dynamic range[J]. Optica, 2015, 2(5): 411-415.
- [6] Akondi V, Dubra A. Accounting for focal shift in the Shack-Hartmann wavefront sensor[J]. Optics Letters, 2019, 44(17): 4151-4154.
- [7] Aisher P L, Crass J, MacKay C. Wavefront phase retrieval with non-linear curvature sensors[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2013, 429 (3): 2019-2031.
- [8] Wang J X, Bai F Z, Ning Y, et al. Wavefront response matrix for closed-loop adaptive optics system based on non-modulation pyramid wavefront sensor[J]. Optics Communications, 2012, 285(12): 2814-2820.
- [9] 王爱业, 潘安, 马彩文, 等. 相位恢复算法: 原理、发展与应用 (特邀) [J]. 红外与激光工程, 2022, 51(11): 20220402.
Wang A Y, Pan A, Ma C W, et al. Phase retrieval algorithms: principles, developments and applications (invited) [J]. Infrared and Laser Engineering, 2022, 51

- (11): 20220402.
- [10] Gerchberg R W, Saxton W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. *Optik*, 1972, 35: 237-246.
- [11] Fienup J R. Iterative method applied to image reconstruction and to computer-generated holograms[J]. *Optical Engineering*, 1980, 19(3): 297-305.
- [12] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. *Applied Optics*, 1982, 21(15): 2758-2769.
- [13] Li C W, Li B M, Zhang S J. Phase retrieval using a modified Shack-Hartmann wavefront sensor with defocus [J]. *Applied Optics*, 2014, 53(4): 618-624.
- [14] 罗伯特·K·泰森. 自适应光学原理[M]. 马浩统, 王三宏, 许晓军, 等, 译. 3 版. 北京: 国防工业出版社, 2014: 177-179.
Tyson R K. Principles of adaptive optics[M]. Ma H T, Wang S H, Xu X J, et al., Transl. 3rd ed. Beijing: National Defense Industry Press, 2014: 177-179.
- [15] Cubalchini R. Modal wave-front estimation from phase derivative measurements[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1979, 69(7): 972-977.
- [16] Kingma D P, Ba J L. Adam: a method for stochastic optimization[C]//Proceedings of the 3rd International Conference on Learning Representations, May 7-9, 2015, San Diego, USA. New York: ICLR, 2015.
- [17] Liu L Y, Jiang H M, He C P. On the variance of the adaptive learning rate and beyond[C]//Proceedings of the Eighth International Conference on Learning Representations, April 26-30, 2020, Addis Ababa, Ethiopia. New York: ICLR, 2020.
- [18] Robbins H, Monro S. A stochastic approximation method [J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1951, 22(3): 400-407.
- [19] Hu Q T, Zhen L L, Mao Y, et al. Adaptive stochastic parallel gradient descent approach for efficient fiber coupling[J]. *Optics Express*, 2020, 28(9): 13141-13154.
- [20] Zhang H, Xu L, Guo Y F, et al. Application of AdamSPGD algorithm to sensor-less adaptive optics in coherent free-space optical communication system[J]. *Optics Express*, 2022, 30(5): 7477-7490.
- [21] 刘武杰, 元秀华, 周泽宇, 等. 混合模型算法在无波前传感自适应光学中的应用[J]. *光电工程*, 2022, 49(12): 220020.
Liu W J, Yuan X H, Zhou Z Y, et al. Application of hybrid modal algorithm in wavefront sensorless adaptive optics[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2022, 49(12): 220020.
- [22] 约瑟夫·W·古德曼. 傅里叶光学导论[M]. 陈家璧, 秦克诚, 曹其智, 译. 4 版. 北京: 科学出版社, 2020: 61-64.
Goodman J W. Introduction to Fourier optics[M]. Chen J B, Qin K C, Cao Q Z, Transl. 4th ed. Beijing: Science Press, 2020: 61-64.
- [23] 拉斐尔·C·冈萨雷斯, 理查德·E·伍兹. 数字图像处理 [M]. 阮秋琦, 阮宇智, 译. 4 版. 北京: 电子工业出版社, 2020: 383-389.
Gonzalez R C, Woods R E. Digital image processing[M]. Ruan Q Q, Ruan Y Z, Transl. 4th ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2020: 383-389.