

# 直线引动器的刚度分析及正确性验证

卢思学<sup>1,2,3</sup>, 陈 忆<sup>1,2</sup>

(1.中国科学院 国家天文台南京天文光学技术研究所,江苏 南京 210042;  
2.中国科学院 中国科学院天文光学技术重点实验室,江苏 南京 210042 3.中国科学院大学,北京 100049)

**摘要:** 直线引动器是一种较为特殊的导轨,被广泛应用于精密仪器的制造领域,是实现导向、精确定位必不可少的元件,对其进行静力学建模与刚度分析,可以为仪器设备的稳定性分析提供理论依据。以 THK 公司开发的 KR26 直线引动器为例,研究直线引动器的静力学建模方法及其刚度。首先从 Hertz 接触理论出发,通过研究单个滚珠与轨道接触的受力情况得到其类刚度系数的表达式及数值。之后建立解析模型,对直线引动器的整体刚度进行研究,分为无预压与有预压两种情况进行讨论,得到其整体刚度的表达式及刚度曲线。最后,基于 Ansys Workbench 进行有限元建模仿真,从有限元的角度对理论分析的正确性进行分析验证。

**关键词:** 直线引动器; Hertz 接触理论; 接触刚度; 有限元法

中图分类号: TH16; TH124 文献标识码: A 文章编号: 1001-3997(2018)05-增-0127-05

DOI:10.19356/j.cnki.1001-3997.20180627.013

## Stiffness Analysis of Linear Actuator and Proof of the Correctness

LU Si-xue<sup>1,2,3</sup>, CHEN Yi<sup>1,2</sup>

(1.National Astronomical Observatories/Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, Chinese Academy of Sciences, Jiangsu Nanjing 210042, China 2.Key Laboratory of Astronomical Optics & Technology, Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, Chinese Academy of Sciences, Jiangsu Nanjing 210042, China 3.University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** Linear actuator is a kind of guide rail different from other rails as an important component widely used in the production of precise instrument. It is an essential element to implement the function of guidance and accurate locating. It can provide theoretical foundations to insure the devices working stably by establishing and analyzing the static model. This investigation takes KR26 made by THK corporation and based on Hertz contact theory for example, firstly, the contact stiffness is solved by studying the contact between a single ball and groove. Then the total stiffness is studied by modeling an analytical model, which would be discussed in two different conditions which differs in considering preload or not. The expression of total stiffness and the force-deformation curve would be solved, and the comparison with the test from THK corporation would be showed. Finally, the finite element model would be established and prove the correctness of theoretical analysis.

**Key Words** Linear Actuator; Hertz Contact Theory; Contact Stiffness; Finite Element Method

## 1 引言

直线引动器作为一种精密传动部件,具有体积小、刚度、定位精度高的特点<sup>[1]</sup>,其结构如图 1 所示。直线引动器是导轨的一种特殊形式,其结构主要包括支承座、外轨道、滚珠丝杠、内滑块等诸多零件。直线引动器在精密仪器制造领域得到了广泛的应用,对于定位精度要求高的仪器更是必不可少的元件。建立其静力学模型,分析其受力时刚度的变化情况,可以为精密仪器的稳定性分析打下良好的基础,为仪器的精度分析提供理论依据。以

某公司生产的 KR26 直线引动器为例,研究其静力学建模方法与整体刚度受力时的变化情况。直线引动器受力时外侧滚道与内滑块通过与滚珠接触而相互作用,其受力形式与滚动直线导轨的受力形式相同,因此 KR26 直线引动器的建模方法可以参考滚动直线导轨的建模方法进行建模。目前导轨的建模方法有以下几种,文献<sup>[2-3]</sup>基于 Hertz 接触理论,建立了导轨的 COFEM 模型,并通过实验对理论进行了验证;文献<sup>[4]</sup>应用有限元的方法,建立了滚动直线导轨的有限元模型,并分析了其承载能力;文献<sup>[5]</sup>基于力学的基

来稿日期 2017-12-10

基金项目 国家自然科学基金项目—天文光谱仪缝前系统结构研究(11573048)

作者简介 卢思学(1991-)男,辽宁丹东人,硕士研究生,主要研究方向 精密仪器及机械领域;

陈 忆(1964-)男,江苏无锡人,硕士生导师,研究员,主要研究方向 天文望远镜及终端仪器设备的机械结构设计

本理论和实验数据分析了导轨受外载荷时整体刚度的变化。

结合上述理论，研究直线引动器的静力学建模方法并研究其刚度特性，为论述方便，下文将把 KR26 直线引动器简称为导轨。以 Hertz 接触理论为基础，参考导轨的弹簧阻尼模型，首先通过分析单个滚珠与轨道接触时的受力情况，得到 KR26 的接触刚度系数；之后对其整体进行建模分析，得到垂直向上的拉力载荷 P 与滑块垂直方向位移量  $\alpha_y$  的关系曲线，即为导轨的刚度曲线；最后基于 Ansys Workbench 对滚珠与轨道的接触情况进行有限元建模仿真，通过有限元仿真的计算结果来验证理论分析得到的导轨刚度曲线的正确性。

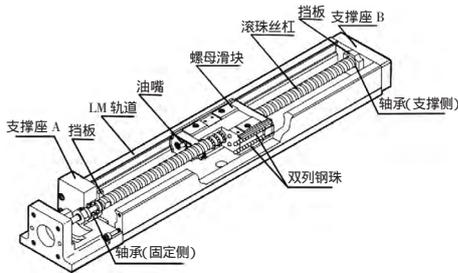


图 1 KR26 直线引动器示意图  
Fig.1 Structure of KR26 Linear Actuator

### 2 类刚度系数的求解

类刚度系数是衡量导轨刚度的重要性能指标，若要计算导轨的整体刚度，首先要计算导轨的类刚度系数，而导轨的类刚度系数  $k_h$  可以由单个滚珠与轨道的接触模型求得<sup>[6-9]</sup>。接触模型由滑块、轨道及钢球组成，其中滑块与轨道的滚道半径相同，且材料相同，如图 2 所示。

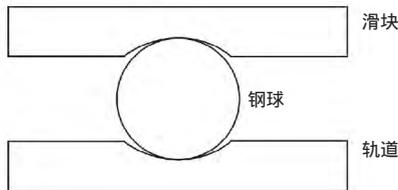


图 2 单个钢球-轨道接触模型  
Fig.2 Contact Model of Single Ball-Groove

设钢球的半径为  $r_1$ ，滑块和轨道的半径为  $r_2$ ，根据 Hertz 接触理论，接触力  $F$  与单个钢球所发生的弹性变形  $\alpha$  可以用式(1)表示<sup>[10]</sup>：

$$F = \frac{2\sqrt{2}\alpha^{3/2}}{\mu^{3/2} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2} \right) \right] (\sum \rho)^{1/2}} \quad (1)$$

式中  $\nu_1, \nu_2$ —泊松比； $E_1, E_2$ —材料的弹性模量，而对于给定导轨而言，除  $\alpha$  之外都是常量，因此式(1)可以简单的表示为：

$$F = k_h \alpha^{3/2} \quad (2)$$

由式(2)可知，导轨中滚道与滚珠的接触问题是非线性的，且接触力与  $\alpha^{3/2}$  成正比，因此之后的求解分析方法都要采用非线性手段来进行分析，尤其是在有限元分析的过程中，需要采用非线性的方法设置其参数，才能得到正确的分析结果，

式(1)中  $\sum \rho$  为综合曲率半径，可以由式(3)求得：

$$\sum \rho = \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22} \quad (3)$$

式中  $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}$ —相互接触的主曲率面的曲率半径，且  $\rho_{21} = 0, \rho_{11} = -\rho_{12} = \frac{1}{r_1}, \rho_{22} = \frac{1}{r_2}$ 。

式(1)中  $\mu$  为赫兹接触系数，与  $\cos \tau$  的数值相关， $\cos \tau$  可以由式(4)求得，赫兹接触系数表反映了  $\cos \tau$  与  $\mu$  的关系，查赫兹接触系数表可以得到  $\mu$  的值。

$$\cos \tau = \frac{|\rho_{11} - \rho_{12}| + |\rho_{21} - \rho_{22}|}{\sum \rho} \quad (4)$$

下面带入实际数值来确定 KR26 直线引动器的类刚度系数，通过与 THK 方面的协商，得到 KR26 直线引动器的部分参数，如表 1 所示。

表 1 KR26 直线引动器基本参数  
Tab.1 Parameters of KR26

导轨型号	相应参数
滚珠直径 $D_w$ /(mm)	2.778mm
预载荷等级/(N)	普通级无预压/ 轻预压(过盈量(1.5~2.5) $\mu\text{m}$ )
每排沟槽中受力滚珠的平均数量	17

THK 系列导轨的材料均为日本标准，将其材质和中国的标准进行对比，得到其弹性模量和泊松比的具体数值，其中 THK-EX50 材料与 304 钢类似，SUS440C 于 9Cr17 类似，查找相关资料得到 KR26 的材料属性，如表 2 所示。由此得到  $E_1=193\text{GPa}$ ， $E_2=200\text{GPa}$ ， $\nu_1=\nu_2=0.3$ ， $r_1=D_w/2$ ；根据导轨的制造工艺， $r_2$  的数值为 (0.515~0.525)倍的单个滚珠直径，计算中取  $r_2=0.52D_w$ ，由此得出计算结果，如表 3 所示。

表 2 KR26 材料属性  
Tab.2 Material Properties of KR26

部件	材料	材料弹性模量/GPa	泊松比
轨道	THK-EX50	193	0.3
滚珠	SUS440C	200	0.3
滑块	THK-EX50	193	0.3

表 3 KR26 参数计算结果  
Tab.3 Result of Parameters

参数名称	参数符号	数值
综合曲率半径	$\sum \rho$	0.7476
赫兹接触系数	$\cos \tau$	0.9260
赫兹接触系数	$\mu$	0.634
类刚度系数	$k_h$	$4.663 \times 10^9$

### 3 对导轨整体刚度曲线的求解

由 KR26 的基本参数可知，KR26 直线引动器有两种不同的预载荷等级，预载荷等级不同，导轨的刚度会有很大变化，因此应该分两种情况分别讨论，首先讨论普通级无预压导轨的受力情况：

当导轨无预紧力作用时，KR26 受到向上拉力  $P$  时的受力模型，如图 3(a)所示。此时主要为上排滚珠受力，下排滚珠受力较弱，在计算中可以忽略，根据力的平衡可知：

$$P = 2nP_s \sin \theta \quad (5)$$

式中  $n$ —导轨中单排滚珠的数量； $P_s$ —上排单个滚珠的接触力； $\theta$ —滚珠与轨道的接触角。

通过式(5)可以求出单个滚珠的接触力  $P_s$ ，进而根据式(6)求得滚珠的法向变形量  $\alpha$ ，在垂直于滑块方向的变形量  $\alpha_y$  可以根据式(7)求解，滚珠垂直于滑块方向的变形量即为滑块上表面的位移量。

$$\alpha = \left( \frac{P}{2n \sin \theta k_h} \right)^{2/3} \quad (6)$$

$$\alpha_f = \left( \frac{P}{2n \sin \theta k_h} \right)^{2/3} \sin \theta \quad (7)$$

取接触角  $\theta=45^\circ$   $n=17$  , 求得滚珠垂直方向的变形量随着滑块受力的变化曲线 如图 3(b)所示。即为滑块表面位移量与外部拉力载荷  $P$  的关系曲线 即为无预压时导轨的刚度曲线

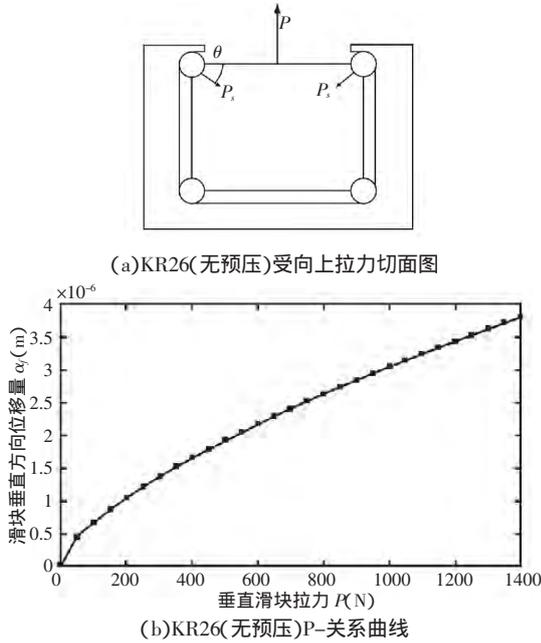


图3 KR26(无预压)受力示意图与刚度曲线

Fig.3 Force Diagram and Stiffness Curve of KR26 Without Preload

之后讨论有预压时导轨的受力情况 导轨有预压且无外力作用时的受力 如图 4(a)所示。导轨为四方向受力导轨 忽略滑块本身自重的影响 只受预紧力作用 可以认为 4 个滚道的滚珠受力均为  $P_0$  计算导轨在此过盈量下滑块受到向上拉力时的滚珠的受力及变形情况 此时上排滚珠受到滑块的作用进一步被压缩 受力增大 而下排滚珠的受力减小 滑块受力后滚珠的变形及受力情况 如图 4(b)所示。此时 设上排单个滚珠受力为  $P_s$  ,下排单个滚珠受力为  $P_x$  ,上排滚珠的法向变形量为  $\alpha_s$  ,下排滚珠的法向变形量为  $\alpha_x$  根据式(2)及力的平衡条件可知:

$$\begin{cases} P_s = k_h \alpha_s^{3/2} \\ P_x = k_h \alpha_x^{3/2} \\ P + 2n P_x \sin \theta = 2n P_s \sin \theta \end{cases} \quad (8)$$

当下排滚珠与滑块不分离时 根据变形协调条件可知:

$$(\alpha_s - \alpha_0) \sin \theta = (\alpha_0 - \alpha_x) \sin \theta \quad (9)$$

联立式(8)、式(9)得到  $P_s$  与  $P$  的关系:

$$P_s^{2/3} = 2P_0^{2/3} - \left( \frac{2n P_x \sin \theta - P}{2n \sin \theta} \right) \quad (10)$$

若拉力  $P$  继续增大 下排滚珠受力会逐渐减小 直到其受力为 0 此时  $\alpha_x=0$  若拉力  $P$  进一步增大 则下排滚珠不再受力 只有上排滚珠受力 受力情况与无预压的情况相同 此时其受力情况满足式(5)。

联立式(5)、式(10)可以得到上排滚珠的变形量  $\alpha$  随  $P$  变化的完整表达式。下面针对 KR26 导轨的具体数据求出 KR26 导轨上排滚珠受力与外载荷  $P$  的关系式:

首先考虑临界载荷的情况 求出临界载荷  $P_c$ 。此时下排滚珠不受力  $P_x=0$  则有  $\alpha_x=0$   $P_s^{2/3} = 2P_0^{2/3}$ 。当 KR26 导轨的预压力为轻预压时 其过盈量在  $(1.5 \sim 2.5) \mu\text{m}$  之间 取预压力  $P_0$  为 170N 则分配到单个滚珠的力为  $170/n=10\text{N}$  此时由式(6)计算变形量  $\alpha_0$  为  $1.663 \mu\text{m}$  即为滚珠的过盈量 符合要求。计算得  $P_0=680n_0$   $P$ - $P_s$  关系式为式(11) 关系图 如图 4(a)所示。

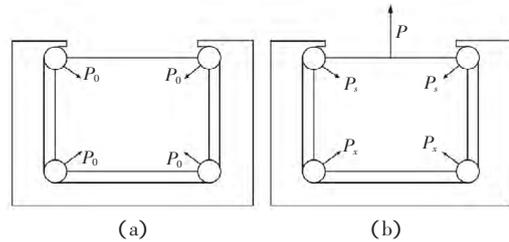


图4 KR26(有预压)受力示意图

Fig.4 Force Diagram of KR26 with Preload

$$\begin{cases} P_s^{2/3} = 2P_0^{2/3} - \left( \frac{2n P_x \sin \theta - P}{2n \sin \theta} \right) & P \leq 680 \\ P = 2n P_s \sin \theta & P > 680 \end{cases} \quad (11)$$

上排滚珠的变形量  $\alpha_s$  由式(6)得到 则滑块表面的位移量  $\alpha_f$  的表达式为式(12) 进而得到轻预压时  $\alpha_f$  随载荷  $P$  的关系曲线 如图 4(b)所示。与无预压时导轨的刚度曲线比较可知有预压的导轨刚度会有所加强。下面将通过运用有限元理论对 KR26 的受力时滚珠的变形情况进一步进行建模仿真 如图 5 所示。并将分析结果与理论分析得到的曲线进行对比 若曲线相近 则理论分析基本正确。  $\alpha_f = (\alpha_s - \alpha_0) \sin \theta$  (12)

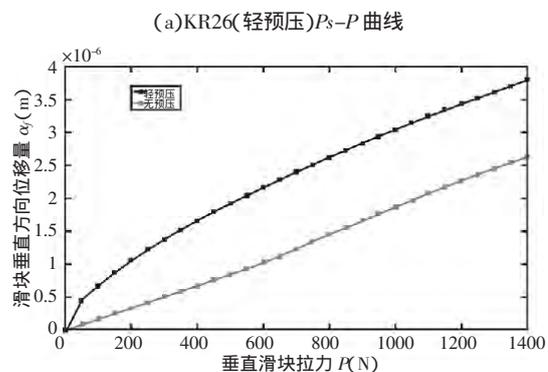
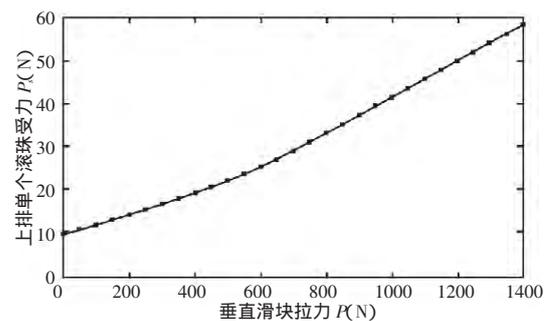


图5 KR26(轻预压) $P_s$ - $P$ 及  $P$ - $\alpha_f$  曲线

Fig.5  $P_s$ - $P$  and  $P$ - $\alpha_f$  Curve of KR26 with Preload

## 4 基于有限元法对理论分析的验证

### 4.1 有限元分析的目的

进行有限元分析的目的是用有限元分析的方法佐证理论

模型的正确性,前文主要是采用 Hertz 接触理论对 KR26 直线驱动器进行了静力学建模分析,从接触力学分析的角度计算了其刚度特性。同样的,可以运用有限元理论从有限元分析的角度对导轨的刚度进行计算,比较理论值与有限元分析结果的差异。

进行有限元建模的目的就是为了从有限元的角度验证直线驱动器基于 Hertz 接触理论的静力学建模方法是否正确,因此在有限元建模过程中,无需建立完整的导轨模型,只需选取单排滚珠与滚道的接触情况进行研究,取适当的滚珠数目,比较有限元计算结果是否满足式(7)即可。若有限元分析求得模型的刚度曲线与理论值相符,则可以证明基于 Hertz 接触理论建立的直线驱动器模型是正确的。

#### 4.2 分析模型的讨论

有限元分析的步骤主要包括建模、网格划分、添加边界条件、求解及后处理四个步骤。主要使用 Ansys Workbench 作为有限元分析工具进行有限元分析,而通过之前的讨论可知,该文所分析的问题为非线性问题,其有限元分析过程较为复杂,需要恰当选择分析模型来简化计算。使用 Solid works 建模工具完成 CAE 建模,在建模过程中,轨道与滚珠的半径按照 KR26 的实际尺寸进行设定,但是滚珠数量选择为  $n=1$ ,即取单个滚珠-轨道的接触受力模型进行分析计算,之后将模型导入 Ansys Workbench 中,在分析软件中建立其有限元模型,由于导轨为对称结构,所以只取导轨的一半来进行分析,以简化计算。

#### 4.3 边界条件的设置及网格划分

该力学模型分析的难点在于边界条件的设置及网格的划分,边界条件和网格质量对计算结果影响极大,只有恰当的约束分析模型的边界条件并且合理的划分网格才能得到正确的计算结果。

首先讨论有限元模型的边界条件,设置接触对。基于赫兹接触理论,接触问题属于非线性问题,因此接触类型选择为 frictional,根据经验摩擦系数取 0.15,接触对有两个,分别为滚珠与轨道的接触和滚珠与滑块的接触,相互接触的两个物体接触面(Contact surface)与目标面(Target surface)的选择上要遵循如下原则<sup>[11-12]</sup>:

(1)凸面对凹面/平面,应该把凸面定义为 Contact surface;

(2)好网格面对粗糙网格面,两个接触面相比较,一个网格比较细,一个网格相对比较粗糙,则网格好的面应该定义为 Contact surface;

(3)软面对硬面,两个接触面,一个相对比较硬,一相对比较软,则软的面应该定义为 Contact surface;

(4)高阶单元对低阶单元,应该把高阶的那个实体对应的接触面定义为 Contact surface;

根据上述规则,应选取滚珠为接触面(Contact surface),滚道面为目标面(Target surface),算法采用加强型拉格朗日算法(Augmented Lagrange)。

模型的外载荷为垂直于滑块表面的均匀作用力,由理论分

析的讨论可知 KR26 的预压力约为 17N,所以作用力的取值范围不应超过预压力的 2 倍,否则分析结果无意义,取作用力范围为(0~30)N。

导轨工作时,轨道下表面与工作面固定,因此在有限元仿真过程中约束条件为轨道下表面全约束。

之后讨论模型网格的划分。该种建模方法建立的单个滚珠-轨道接触为线接触,为保证网格较为平滑,因而采用 CFD 求解器进行网格划分,Shape Checking 选择为 aggressive mechanical(大变形和非线性研究),轨道与滑块为柱状体,均采用一次六面体单元,滚珠为球体,采用一次四面体单元。滑块、轨道与滚珠接触的内侧分别添加 3 层边界层,以确保求得接触力的准确性。单元大小需要严格控制,轨道、滑块与滚珠接触的面的单元大小为 0.15mm,滚珠的单元大小为 0.1mm,由此方法生成有限元模型,如图 6 所示。

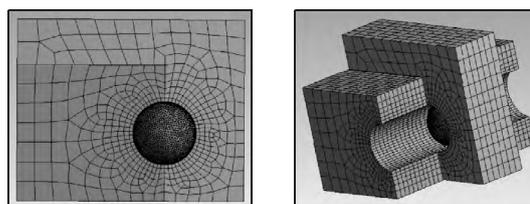


图 6 导轨有限元模型

Fig.6 Finite Element Model of KR26

#### 4.4 计算结果与后处理

单个滚珠的接触变形量的理论计算值由式(6)得到,其中取  $n=1$ ,由图(6)可知,在合理的载荷  $P$  的范围内,理论值与 workbench 分析结果较为接近,可以认为用该方法建立 KR26 直线驱动器的模型是可行的,如图 7 所示。

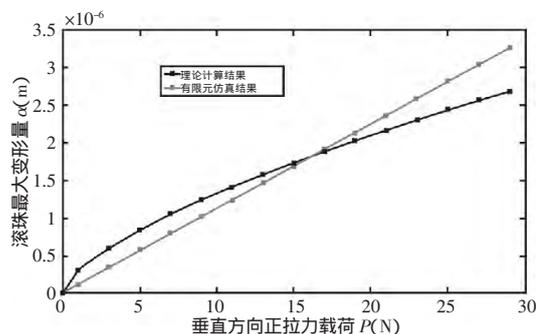


图 7 单个滚珠接触变形理论分析与有限元分析结果对比  
Fig.7 Comparison Between Theoretical Analysis and Finite Element Analysis of Single Ball-Groove Contact

#### 4.5 进一步的验证

为了进一步验证理论分析的正确性,采用之前论述的有限元分析方法,建立  $n=3$  时滚珠与轨道的接触模型,对一排三个滚珠与滚道接触的情况进行有限元分析,设置中保证滚珠具有沿轨道方向的自由度,防止滚珠之间的挤压对仿真结果的干扰。

同理可知,此时外载荷  $P$  的范围可以取(0~90)N,得到 ansys workbench 仿真结果与理论公式计算比较,如图 8 所示。理论分析与仿真结果相差不大,可以认为建立的 KR26 静力学模型和理论分析得到的 KR26 刚度曲线是正确的。

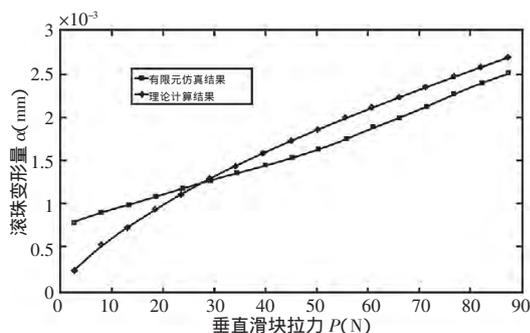


图8 三个滚珠接触变形理论分析与有限元分析结果对比  
Fig.8 Comparison Between Theoretical Analysis and Finite Element Analysis of Three Ball-Groove Contact

## 5 结论

(1)基于 Hertz 接触理论,以 THK 公司生产的 KR26 直线引动器为例研究了直线引动器类刚度系数的求解方法。(2)建立了四方向均匀受力的直线引动器的静力学模型,并分析了其刚度特性。有预压的导轨的刚度要明显好于无预压的导轨。(3)运用有限元理论,对理论分析的结论进行了验证性仿真,以证明理论分析的正确性。

### 参考文献

[1] 孙健利.直线滚动导轨机构承受垂直载荷时的刚度计算[J].华中理工大学学报,1988(5):35-40.  
(Sun Jian-li.Calculation of stiffness of linear rolling guide mechanism under vertical load [J].Journal of Huazhong University of Science and Technology,1988 (5):35-40.)

[2] Dadalau A,Groh K,Reu M.Modeling linear guide systems with CoFEM: equivalent models for rolling contact[J].Production Engineering,2012,6(1):39-46.

[3] Dadalau A,Verl A.Modeling linear guide systems with CoFEM: experimental validation[J].Production Engineering,2012,6(3):259-265.

[4] 陈殿华,张仲伟,高桂芝.精密直线移动滚珠导轨承载性能的有限元分析[J].机械传动,2006(1):74-76+89.  
(Chen Dian-hua,Zhang Zhong-wei,Shang Gui-zhi.Finite element anal-

ysis of the bearing performance of precision straight moving ball guide rail[J].Echanical Transmission,2006(1):74-76+89.)

[5] Dhupia J S,Ulsoy A G,Katz R.Experimental Identification of the Non-linear Parameters of an Industrial Translational Guide for Machine Performance Evaluation[J].Journal of Vibration & Control,2008,14(5):645-668.

[6] Ninomiya M,Kato S.Analysis of Linear Guide and Ball Screw Stiffness [J].International Journal of the Japan Society for Precision Engineering,1999,33(3):173-177.

[7] 孙健利.精密直线滚动导轨的预加载荷及刚度计算[J].华中理工大学学报,1988(6):125-130.  
(Sun Jian-li.Calculation of pre load and stiffness of precision linear rolling guide [J].Central China University of Science and Technology,1988(6):125-130.)

[8] 孙伟,孔祥希,汪博.直线滚动导轨的 Hertz 接触建模及接触刚度的理论求解[J].工程力学,2013(7):230-234.  
(Sun Wei,Xiang Xi,Wang Bo,Wen Bang-chun.Hertz contact modeling and contact stiffness of the linear rolling guide theory for[J].Engineering Mechanics,2013(7):230-234.)

[9] 陈飞.基于 Hertz 接触理论的滚动直线导轨副静力学解析建模[J].西华大学学报:自然科学版,2016(2):39-43.  
(Chen Fei.A statics analytical modeling of a rolling linear guide based on Hertz contact theory[J].Journal of Xihua University:Natural Science,2016(2):39-43.)

[10] 波波夫.接触力学与摩擦学的原理及其应用[M].北京:清华大学出版社,2011.  
(Bobo-fu.The Principle and Application of Contact Mechanics and Tribology[M].Beijing:Tsinghua University Press,2011.)

[11] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社,2003.  
(Wang Xu-cheng.Finite Element Method[M].Beijing:Tsinghua University Press,2003.)

[12] 斯巴.工程分析中的有限元法[M].北京:机械工业出版社,1991.  
(Siba.Engineering Analysis of the Finite Element Method[M].Beijing:Mechanical Industry Press,1991.)

(上接第126页)

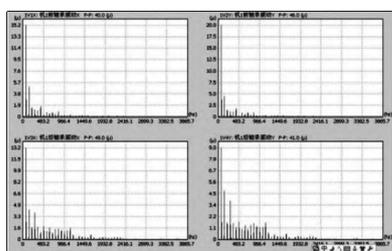


图7 频谱图  
Fig.7 Vibration Frequency

## 5 结语

通过理论分析和实际案例计算可以得出,当压缩机组轴系出现角度不对中时,转子会产生一定挠度值,该挠度值会使转子产生明显工频径向振动,尤其在过临界时表现最为强烈。但轴系角度不对中与转子不平衡所产生的振动特征非常相近,所以在排除了压缩机转子不平衡的情况后,应优先考虑角度不对中的影响。

### 参考文献

[1] 陈进.机械设备故障诊断技术及其应用[M].上海:上海交通大学,2001.  
(Chen Jin.Mechanical Equipment Fault Diagnosis Technology and App-

lication[M].Shanghai:Shanghai Jiaotong University,2001.)

[2] 寇胜利.汽轮发电机组的振动及现场平衡[M].北京:中国电力出版社,2007(7).  
(Kou Sheng-li.Vibration and Field Balance of Turbine Generator Set [M].Beijing:China Electric Power Press,2007(7).)

[3] Chu F,Tang Y.Stability and non2linear responses of a rotor2bearing system with pedestal looseness[J].Journal of Sound and Vibration,2001,241(5):879-893.

[4] Ji Z,Zu J W.Method of multiple scales for vibration analysis of rotor2 shaft systems with non2linear bearing pedestal model [J].Journal of Sound and Vibration,1998,218(2):293-305.

[5] Kim Y B,Noah S T.Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise2linear characteristics: a general approach[J].ASME J of Applied Mechanics,1991,58(6):545-554.

[6] 钟一谔,何衍宗,王正等.转子动力学[M].北京:清华大学出版社,1987(11).  
(Zhong Yi-e,He Yan-Zhong,Wang Zheng.Rotor Dynamics[M].Beijing:Qinghua University Press,1987(11).)

[7] 郝建山,闻邦椿.分布多质量转子系统的不平衡响应特征[J].机械设计与制造,2006(7):34-36.  
(Hao Jian-shan,Wen Bang-chun.Unbalance response characteristics of distributed multi-mass rotor system[J].Machinery Design and Manufacture,2006(7):34-36.)